KTH Matematik

Seminarium 6 i kursen SF1626 Flervariabelanalys VT2011

1. (a) Förklara vad som menas med ett *vektorfält* i planet respektive rymden;
(b) Hur definieras att ett vektorfält är konservativt?
(c) Förklara vad som menas att en kurvintegral är oberoende av väg;
(d) Förklara kortfattad hur de matematiska begreppen *kurvintegral, vektorfält, potential* och *konservativt vektorfält* kan användas för att beskriva/diskutera fysikaliskt arbete och konservering (bevarande) av energi.

2. Ett vektorfält $\mathbf{F} = (P, Q)$ i området $x > 0$, $y > 0$ i planet ges av formler

$$P(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}; \quad Q(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{ax}{y^2}.$$

För vilka värdena av parametern a är vektorfältet konservativt? Bestäm potentialen av vektorfältet för sådana a.

3. $\mathbf{F}$ är det vektorfält i $\mathbb{R}^3$ som ges av $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$.
(a) Låt γ vara den kurva som ges av $(x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, t)$ då t löper från 0 till $\pi/4$. Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ genom att uttnytja kurvans parametrisering.
(b) Visa att fältet $\mathbf{F}$ är konservativt och bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$. Beräkna nu integralen i (a) med hjälp av potentialen.
(c) För vilka slutna kurvor C gäller att $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$?

4. Låt Ω vara ett bågvis sammanhängande område i planet, och låt $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ vara ett vektorfält definierat på Ω. Betrakta följande påståenden.

- Det finns en funktion $U : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ sådan att $\mathbf{F}(x,y) = \operatorname{grad} U(x,y)$;
- Om γ är en kurva i Ω från (x_1, y_1) till (x_2, y_2), då gäller det att

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1).$$

- $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av väg i Ω.
- $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva C i Ω.
- $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ i Ω.

Gör en begreppskarta med implications- och ekvivalenspilar som visar hur dessa påståenden ovan hänger ihop. Ange eventuella extra antaganden som behövs för att implikationerna eller ekvivalenserna skall vara giltiga.

5. Låt $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x^2)$.
(a) Beräkna $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ när γ_1 är linjesegmentet från punkten $(0, 1)$ till punkten $(1, 0)$.
(b) Beräkna $\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ när γ_2 är den del av parabeln $y = 1 - x^2$ som går från punkten $(1, 0)$ till punkten $(0, 1)$.
(c) Beräkna $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ när γ är den slutna kurvan som består av två kurvstyckena γ_1 och γ_2.

- genom att uttnyttja resultaten i (a) och (b);
- genom att tillämpa Greens formel

Ovanstående uppgifter ska lösas inför seminarietillfället. Till seminariet ska du ha med dig lösningar på dessa uppgifter, skrivna på ett papper per uppgift, med namn och personnummer på. Lösningarna ska vara väl motiverade och tydligt skrivna. Även en person som inte är insatt i problemet i förväg ska lätt kunna läsa och förstå era lösningar. Rita figur, förklara alla beteckningar du inför, använd vårt svenska språk för att förklara hur du resonerar!
Vid seminariet kommer era lösningar att behandlas och diskuteras. Exempel på vad som kan hända: några uppgifter samlas in och rättas av lärare, några uppgifter kamraträttas, dvs rättas av andra studenter, några uppgifter blir lösta på tavlan av studenter (t ex av dig!). Precis vad som ska hända och vad du ska göra får du veta när du kommer dit. Men du måste vara så förberedd att du kan förklara alla dina lösningar framme vid tavlan inför de andra studenterna.

Godkänd vid ett seminarietillfälle blir du om du både är närvarande vid hela seminarietillfället och på ett korrekt och bra sätt utför de uppgifter du blir tilldelad, dvs räknar och förklarar vid tavlan, rättar andra studenters lösningar, lämnar in korrekta och välskrivna lösningar osv.
Godkänd på hela seminarieserien blir du om du är godkänd på minst 4 av de 6 seminarietillfällena. Klarar du det får du automatiskt 3 poäng på uppgift 3 vid det ordinarie skriftliga tentamenstillfället och vid ordinarie omtentamenstillfället (och endast vid dessa tillfällen). Väl godkänd blir du om du är godkänd på alla 6 seminarietillfällen och du får då på motsvarande sätt automatiskt 4 poäng på uppgift 3. Om du har 3 poäng på uppgiften genom seminarierna och vill höja till 4 poäng behöver du göra hela uppgiften vid tentamen.

Det är tillåtet att samarbeta med andra när du löser uppgifterna, men det är inte tillåtet att skriva av en lösning eller lämna in en lösning som du inte arbetat med själv. Var och en ska skriva sina egna lösningar. Och observera detta: det räcker inte att du har med dig lösningar, du ska i detalj kunna förklara varje steg i lösningarna. Om du inte muntligt och skriftligt kan förklara din egen lösning ordentligt blir du inte godkänd.

Din föreläsare informerar om i vilken grupp du skall redovisa dina seminarieuppgifter. Endast seminarieuppgifter redovisade i föreskriven grupp ger underlag för bonuspoäng.