KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2
Fredagen den 28 januari, 2011

UPPGIFT

(1) Låt V vara mängden av vektorer (x_1, x_2, x_3) i $\mathbb{R}^3$ som uppfyller $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, dvs är ortogonala mot vektorn $(1, 1, 1)$.

(a) Visa att V är ett underrum[1] i $\mathbb{R}^3$. **(2)**

(b) En bas för V ges av $B = \{\, (1,\, 0, -1),\ (1, -1,\, 0)\,\}$. Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = (1, -2, 1)$ med avseende på basen B. **(2)**

(2) I denna uppgift är $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm en bas för nollrummet[2] till A och en bas för radrummet[3] till A. (Kontrollera gärna räkningarna genom att se att de båda rummens basvektorer är ortogonala mot varandra.) **(2)**

(b) Bestäm en bas för kolonnrummet[4] till A och en bas för nollrummet till A^{T}. (Även här kan räkningarna kontrolleras på samma sätt som ovan.) **(2)**

(3) Den här uppgiften handlar om linjära avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ och deras standardmatriser. Låt (x, y) vara koordinaterna i ett rätvinkligt koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$.

(a) Låt $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotationen kring origo med en vinkel på 90° ($\pi/2$ radianer) moturs. Bestäm standardmatrisen, A, för T_1. **(1)**

(b) Låt $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen $y = -x$. Bestäm standardmatrisen, B, för T_2. **(1)**

(c) Bestäm standardmatrisen, C, för sammansättningen $T_2 \circ T_1$. **(1)**

(d) Avbildningen $T_2 \circ T_1$ är en spegling. I vilken linje? Motivera ditt svar. **(1)**

---

[1]eng. *subspace*, kallas också *delrum* på svenska.
[2]eng. *null space*
[3]eng. *row space*
[4]eng. *column space*

(1) (a) Mängden V, som är en delmängd av $\mathbb{R}^3$, är ett *underrum* (eller *delrum*) i $\mathbb{R}^3$ om det för varje par av vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i V och varje skalär k gäller att de båda vektorerna $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ och $k\cdot\mathbf{u}$ ligger i V.

Antag alltså att $\mathbf{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)$ och $\mathbf{v} = (v_1,\, v_2,\, v_3)$ är två vektorer som båda ligger i V, dvs uppfyller $u_1+u_2+u_3 = 0$ och $v_1+v_2+v_3 = 0$, samt att k är en skalär (reellt tal). Låt $\mathbf{w} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$ och $\mathbf{q} = k\cdot\mathbf{u}$. Vi ska visa att både $\mathbf{w}$ och $\mathbf{q}$ ligger i V.

Vi har att

$$\mathbf{w} = (w_1,\, w_2,\, w_3) = (u_1,\, u_2,\, u_3) + (v_1,\, v_2,\, v_3) = (u_1+v_1,\, u_2+v_2,\, u_3+v_3)$$

, så vi får att

$$w_1+w_2+w_3 = u_1+v_1+u_2+v_2+u_3+v_3 = (u_1+u_2+u_3)+(v_1+v_2+v_3) = 0+0 = 0,$$

vilket visar att $\mathbf{w}$ ligger i V.

Vidare har vi har att

$$\mathbf{q} = (q_1,\, q_2,\, q_3) = k\cdot(u_1,\, u_2,\, u_3) = (ku_1,\, ku_2,\, ku_3),$$

så vi får att

$$q_1+q_2+q_3 = ku_1+ku_2+ku_3 = k(u_1+u_2+u_3) = k\,0 = 0,$$

vilket visar att även $\mathbf{q}$ ligger i V.

Därmed är V ett underrum.

(b) Att $B = \{\,\mathbf{u}_1,\ \ \mathbf{u}_2\,\} = \{\,(1,\,0,-1),\ \ (1,-1,\,0)\,\}$ är en *bas* till underrummet V innebär att varje vektor $\mathbf{v}$ som ligger i V på ett entydigt sätt kan skrivas på formen $\mathbf{v} = c_1\cdot\mathbf{u}_1 + c_2\cdot\mathbf{u}_2$, där skalärerna c_1 och c_2 är *koordinaterna* för $\mathbf{v}$ i den givna basen B.

Speciellt bestäms koordinaterna c_1 och c_2 för vektorn $\mathbf{v} = (1,-2,\,1)$ ur villkoret $(1,-2,\,1) = c_1\cdot(1,\,0,-1) + c_2\cdot(1,-1,\,0)$.

Detta är ett linjärt ekvationssystem, i de obekanta c_1 och c_2, med totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

som med några elementära radoperationer överförs till

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

.

Ur denna totalmatris på reducerade trappstegsformen kan vi läsa av att $c_1 = -1$ och $c_2 = 2$, vilket alltså är de sökta koordinaterna för $\mathbf{v}$.

Anmärkning: Vi kunde (och borde kanske) ha börjat med att kontrollera att den givna vektorn $\mathbf{v}$ ligger i V, genom att konstatera att $v_1+v_2+v_3 = 1-2+1 = 0$. Men eftersom ekvationssystemet ovan hade lösning kan vi ändå dra slutsatsen att $\mathbf{v}$ ligger i V. Om vi hade försökt bestämma koordinaterna för en vektor som inte ligger i V, t ex $(1, -1,\ 1)$, så hade tredje högerledet i den sista totalmatrisen ovan blivit $\neq 0$.

(2) Vi ska lösa uppgiften med en generell metodik, även om det för denna lilla matris går att hitta vissa av baserna på ett enklare sätt.

(a) Vi startar med att medelst elementära radoperationer överföra den givna matrisen $\mathbf{A}$ till reducerad trappstegsform. (Gauss-Jordans metod.)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

$\mathbf{R}$ har erhållit genom att 3 gånger första raden i $\mathbf{A}$ har adderat till andra raden i $\mathbf{A}$. Matrisen $\mathbf{R}$ är på reducerad trappstegsform med enbart en trappstegsetta.
Nollrummet till en matris påverkas inte av elementära radoperationer, så nollrummen till $\mathbf{A}$ och $\mathbf{R}$ är desamma. Den fullständiga lösningen till systemet $\mathbf{Rx} = \mathbf{0}$ erhålls genom att sätta de “fria” variablerna x_2 och x_3 till t respektive s, och sedan uttrycka den “bundna” variabeln x_1 i t och s. Detta ger att
$(x_1,\ x_2,\ x_3) = (t - 2s,\ t,\ s) = t \cdot (1, 1, 0) + s \cdot (-2, 0, 1)$.
Ur detta följer att de båda vektorerna $(1, 1, 0)$ och $(-2, 0, 1)$ utgör en bas för nollrummet till matrisen $\mathbf{R}$, och därmed utgör de en bas även för nollrummet till matrisen $\mathbf{A}$.
Radrummet till en matris påverkar inte heller av elementära radoperationer, så radrummen till de bägge matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{R}$ är desamma. De nollskilda raderna i matrisen $\mathbf{R}$ (som är på trappstegsform) är alltid linjärt oberoende och utgör en bas till radrummet för $\mathbf{R}$, och därmed även till radrummet för $\mathbf{A}$. I detta fall utgör alltså den ensamma vektorn $(1, -1,\ 2)$ en bas för radrummet till $\mathbf{A}$
Man kan konstatera att denna basvektor $(1, -1,\ 2)$ för radrummet till $\mathbf{A}$ är ortogonal mot var och en av de bägge basvektorerna $(1, 1, 0)$ och $(-2, 0, 1)$ för nollrummet till $\mathbf{A}$. Detta är som det ska, eftersom nollrum och radrum är ortogonala komplement till varandra. (Radrummet består av alla linjärkombinationer av raderna i $\mathbf{A}$ medan nollrummet består av alla vektorer som är vinkelräta mot alla rader i $\mathbf{A}$).

(b) Nu överför vi, medelst elementära radoperationer, matrisen $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ till reducerad trappstegsform.

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{R}}$$

$\tilde{\mathbf{R}}$ har erhållit genom att första raden i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ har adderat till andra raden i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ och (-2) gånger första raden i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ har adderat till tredje raden i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$. $\tilde{\mathbf{R}}$ är på reducerad trappstegsform med enbart en trappstegsetta.
Nollrummen till $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ och $\tilde{\mathbf{R}}$ är desamma. Den fullständiga lösningen till $\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ erhålls genom att sätta den “fria” variabeln u_2 till t och sedan uttrycka den “bundna” variabeln u_1 i t. Detta ger att $(u_1,\ u_2) = (3t,\ t) = t \cdot (3, 1)$, ur vilket följer att

vektorn $(3,1)$ utgör en bas för nollrummet till $\tilde{\mathbf{R}}$, och därmed även för nollrummet till $\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

Radrummen till $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ och $\tilde{\mathbf{R}}$ är också desamma. De nollskilda raderna i $\tilde{\mathbf{R}}$ utgör en bas till radrummet för $\tilde{\mathbf{R}}$, och därmed även för radrummet till $\mathbf{A}^\mathsf{T}$. I detta fall utgör alltså den ensamma vektorn $(1,-3)$ en bas för radrummet till $\mathbf{A}^\mathsf{T}$. Men radrummet för $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ är ekvivalent med kolonnrummet för $\mathbf{A}$, vilket innebär att vektorn $(1,-3)$ utgör en bas även för kolonnrummet till $\mathbf{A}$.

Man kan konstatera att denna basvektor $(1,-3)$ för radrummet till $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ (och kolonnrummet till $\mathbf{A}$) är ortogonal mot basvektorn $(3,1)$ för nollrummet till $\mathbf{A}^\mathsf{T}$. Detta är igen som det ska. (Kolonnrummet till $\mathbf{A}$ består av alla linjärkombinationer av kolonnerna i $\mathbf{A}$ medan nollrummet till $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ består av alla vektorer som är vinkelräta mot alla kolonner i $\mathbf{A}$).

Anmärkning: Ett alternativt sätt att bestämma en bas för kolonnrummet till $\mathbf{A}$ är att välja ut de kolonner i $\mathbf{A}$ som svarar mot "trappstegsettor" i $\mathbf{R}$ från (a)-uppgiften. Det leder till att första kolonnen i $\mathbf{A}$ utgör en bas för kolonnrummet till $\mathbf{A}$, med samma svar som ovan. På motsvarande sätt kan man bestämma en bas för kolonnrummet till $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ (och därmed även för radrummet till $\mathbf{A}$) genom att välja ut de kolonner i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ som svarar mot trappstegsettor i $\tilde{\mathbf{R}}$. Även det ger samma svar som ovan (i detta exempel).

(3) (a) Eftersom rotationen är en linjär avbildning kan vi skriva upp standardmatrisen för avbildningen om vi känner till bilden av standardbasvektorerna. I detta fall kommer $\mathbf{e}_x$ att roteras till $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_y$ till $-\mathbf{e}_x$, förutsatt att koordinatsystemet är högerorienterat. Alltså ges första kolonnen av $(0,1)$ och andra av $(-1,0)$. Standardmatrisen ges av

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) På samma sätt som i första deluppgiften behöver vi bestämma bilderna av basvektorerna. Denna gång speglas $\mathbf{e}_x$ till $-\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_y$ speglas till $-\mathbf{e}_x$. Vi får därmed standardmatrisen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Standardmatrisen för sammansättningen ges av matrisprodukten av de båda standardmatriserna för T_1 och T_2. Vi får därmed standardmatrisen

$$C = BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 - 1\cdot 1 & 0\cdot(-1) - 1\cdot 0 \\ -1\cdot 0 + 0\cdot 1 & -1\cdot(-1) + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Eftersom den andra basvektorn bevaras är det en spegling i y-axeln.

Svar:

(1) (b) Koordinaterna för $\mathbf{v}$ är $(-1,2)$.

(2) (a) $\{(1,1,0),(-2,0,1)\}$ är en bas för nollrummet till A och $\{(1,-1,2)\}$ är en bas för radrummet till A.

(b) $\{(3,1)\}$ är en bas för nollrummet till A^T och $\{(1,-3)\}$ utgör en bas för kolonnrummet till A.

(3) (a) Standardmatrisen för T_1 är $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Standardmatrise för T_2 är $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Standardmatrisen för $T_2 \circ T_1$ är $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Det är en spegling i y-axeln.

PRELIMINÄRA BEDÖMNINGSKRITERIER

Mindre räknefel ger i allmänhet inget avdrag, om de inte väsentligen förändrar karaktären hos uppgiften.

(1)
- Korrekt kontroll av att V är slutet under addtion eller multiplikation med skalär, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd kontroll av att V är ett delrum i $\mathbb{R}^3$. , **1 poäng**.
- Korrekt uppställda villkor på koordinaterna, **1 poäng**.
- Korrekt bestämda koordinater, **1 poäng**.

(2)
- Korrekt bestämd bas för nollrummet till A, **1 poäng**.
- Korrekt bestämd bas för radrummet till A, **1 poäng**.
- Korrekt bestämd bas för kolonnrummet till A, **1 poäng**.
- Korrekt bestämd bas för nollrummet till A^{T}, **1 poäng**.

(3)
(a) Korrekt motiverad standardmatris, A, **1 poäng**.
(b) Korrekt motiverad standardmatris, B, **1 poäng**.
(c) Korrekt motiverad standardmatris, C, **1 poäng**.
(d) Korrekt motiverat svar, **1 poäng**.