KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 1
Måndagen den 31 januari, 2011

(1) Låt

$$A = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

vara totalmatrisen[1] för ett linjärt ekvationssystem i fyra obekanta, x_1, x_2, x_3, x_4.

(a) Överför A på reducerad trappstegsform[2] med hjälp av Gauss-Jordans metod. (*Ledning:* Om du har räknat rätt ska lösningen bara innehålla heltal.) **(2)**

(b) Använd den reducerade trappstegsformen av A för att lösa ekvationssystemet. **(2)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

(a) Vi gör ett antal radoperationer enligt Gauss-Jordans metod:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 + 2r_1 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 4 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ \frac{1}{5}r_2 \\ r_3 + \frac{3}{5}r_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{5} & \frac{17}{5} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - \frac{4}{17}r_3 \\ \frac{5}{17}r_3 \end{bmatrix} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - 2r_2 - r_3 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

och har därmed kommit fram till den reducerade trappstegsformen av A.

(b) Från den reducerade trappstegsformen läser vi av att x_3 är en fri variabel och vi inför en parameter t för denna och får $x_3 = t$. Från ekvationerna som motsvarar raderna i

[1] eng. *augmented matrix*
[2] eng. *reduced row-echelon form*

matrisen får vi

$$x_1 = 2 - x_3 = 2 - t, \quad x_2 = 1 + x_3 = 1 + t \quad \text{och} \quad x_4 = 1.$$

Alltså ges lösningarna av $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 - t, 1 + t, t, 1)$, där t är en reell parameter.

(c) Låt B vara den förlängda matrisen till ekvationssystemet i c-uppgiften. Då är B radekvivalent med

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Vi har bara bytt plats på dom sista kolumnerna i den reducerade trappstegsformen av A.) För att överföra B på reducerad trappstegsform krävs bara ett par radoperationer ytterligare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekvationssystemet i c-uppgiften har alltså den unika lösningen $(u, v, w) = (-3, -2, 1)$.

(2) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

och låt $B = (A - A^T)^2$.

(a) Beräkna B. **(1)**

(b) Beräkna $\det B$. **(2)**

(c) I det här fallet är B symmetrisk, dvs $B^T = B$. Går det att hitta en annan kvadratisk matris A sådan att $(A - A^T)^2$ *inte* är symmetrisk? **(1)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

(a) Vi har

$$A - A^T = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

och alltså

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

.

(b) Determinanten är noll. Det kan man se antingen genom att beräkna determinanten med kofaktorer eller genom att konstatera att

$$\det(A - A^T) = \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

och sedan använda att $\det(A - A^T)^2 = [\det(A - A^T)]^2$.

(c) Nej, det går inte att hitta någon sådan matris A eftersom

$$\begin{aligned} [(A - A^T)^2]^T &= [AA - AA^T - A^T A + A^T A^T]^T \\ &= (AA)^T - (AA^T)^T - (A^T A)^T + (A^T A^T)^T \\ &= A^T A^T - (A^T)^T A^T - A^T (A^T)^T + (A^T)^T (A^T)^T \\ &= A^T A^T - AA^T - A^T A + AA \\ &= (A - A^T)^2 \end{aligned}$$

så $(A - A^T)^2$ är symmetrisk oavsett vilken kvadratisk matris A vi börjar med.

(3) Låt W vara planet i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen $3x + 2y + z = -6$ och låt P vara punkten med koordinater $(1, 2, 1)$.

(a) Bestäm en ekvation för ett plan U som är parallellt med W och som går genom punkten P. **(2)**

(b) Bestäm avståndet mellan planet W och punkten P. **(2)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

(a) Eftersom planet ska vara parallellt med W ska det ha samma normalvektor, dvs $\mathbf{n} = (3, 2, 1))$ och ekvationen måste vara $3x + 2y + z = d$ för någon konstant d. För att bestämma d använder vi kravet att planet ska gå genom P, vilket ger

$$d = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 8.$$

Därmed ges planet U av ekvationen $3x + 2y + z = 8$.

(b) Vi kan antingen använda avståndsformeln (sats 3.3.4 i Anton-Rorres) som ger att avståndet är

$$\frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$

eller projicera en vektor från P till en punkt i planet, tex $Q = (0, 0, -6)$, på normalen. Vi får då att $\overline{PQ} = (-1, -2, -7)$ vars projektion på normalen är

$$\frac{(-1, -2, -7) \cdot (3, 2, 1)}{(3, 2, 1) \cdot (3, 2, 1)}(3, 2, 1) = \frac{-14}{14}(1, 2, 3) = -(1, 2, 3).$$

Längden av denna projektion ger avståndet som därmed är $\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

(c) Varje plan som är parallellt med $3x+2y+z = -6$ har ekvationen $3x+2y+z = a$ för något a. Om planet ska innehålla punkten $(1, 2, 1)$ måste $a = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 8$. Svar: $3x + 2y + z = 8$.

Svar:

(1) (a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(b) Lösningen är $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 - t, 1 + t, t, 1)$, där t är en reell parameter.

(2) (a) $B = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & -8 \end{pmatrix}$

(b) $\det(B) = 0$.

(c) Nej, $(A^{\mathsf{T}} - A)^2$ är alltid symmetrisk.

(3) (a) Ekvationen för planet ges av $3x + 2y + z = 8$.

(b) Avståndet mellan P och W är $\sqrt{14}$.

Preliminära bedömningskriterier

Mindre räknefel ger i allmänhet inget avdrag, om de inte väsentligen förändrar karaktären hos uppgiften. För mer än två poäng på en uppgift krävs att det finns förklarande text. För full poäng krävs att lösningen är välpresenterad med bra förklarande text till beräkningarna.

(1) (a)
- Korrekt påbörjad Gausselimination, **1 poäng**
- Korrekt slutförd Gauss-Jordanelimination, **1 poäng**

(b)
- Korrekt införande av parameter, **1 poäng**
- Korrekt slutförd lösning av ekvationssystemet, **1 poäng**

(2) (a) Korrekt beräknad matris B, med avseende på transponering av A, matrissubtraktion och matrismultiplikation, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt metod för att beräkna $\det B$, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av $\det B$, **1 poäng**.

(c) Korrekt motiverat svar, **1 poäng**.

(3) (a)
- Korrekt normalvektor, **1 poäng**
- Korrekt motiverad ekvation, **1 poäng**

(b)
- Korrekt metod för att bestämma avståndet, **1 poäng**
- Korrekt utförd beräkning av avståndet, **1 poäng**