KTH Matematik

Kontrollskrivning 1 SF1626 Flervariabelanalys 2011
Onsdagen 2 februari kl 08.15 – 09.45
Svar och lösningsförslag

Inga hjälpmedel tillåtna

Lycka till!

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, -2, 3)$ till ytan $x^2 + 2y^2 + z = 12$.

Lösning: Vi sätter $f(x, y) = 12 - x^2 - 2y^2$. Vår yta är då funktionsytan $z = f(x, y)$. Vi deriverar och får $\partial f/\partial x = -2x$, $\partial f/\partial y = -4y$ och i den aktuella punkten $\partial f/\partial x(1, -2) = -2$, $\partial f/\partial y(1, -2) = 8$. Ekvationen för tangentplanet blir därför

$$z = 3 - 2(x - 1) + 8(y + 2).$$

Svar: $z = 3 - 2(x - 1) + 8(y + 2)$

2. Bestäm alla funktioner av typ $f(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2)$ som satisfierar ekvationen

$$x\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + z\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 4(x^2 + y^2 + z^2) \cdot f(x, y, z)$$

.

Lösning: Vi betecknar $u = x^2 + y^2 + z^2$ och $f(x, y, z) = g(u)$.
Enligt kedjeregeln får vi

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2xg'(u)$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 2yg'(u)$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2zg'(u).$$

Vi substituerar derivatorna samt $f(x, y, z) = g(u)$ i ekvationen och förenklar:

$$2x^2g'(u) + 2y^2g'(u) + 2z^2g'(u) = 4(x^2 + y^2 + z^2) \cdot g(u)$$
$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2)g'(u) = 4(x^2 + y^2 + z^2)g(u)$$
$$\Rightarrow g'(u) = 2g(u)$$

Vi har fått en linjär, homogen DE ev första ordningen med konstanta koefficienter. Den karrakteristiska ekv. $k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$. Härav $g(u) = Ce^{2u}$och därmed

$$f(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2) = Ce^{2(x^2+y^2+z^2)}$$

Svar:

$$f(x, y, z) = Ce^{2(x^2+y^2+z^2)}$$

3. Funktionen h ges av $h(x, y, z) = (x + y)e^{-z}$.

   a) Bestäm riktningsderivatan av h i punkten $(1, 1, 0)$ i riktning mot punkten $(0, 0, 1)$.

   b) I vilken riktning är h:s riktingsderivata som störst i punkten $(1, 1, 0)$?

Lösning: Riktingsderivatan kan beräknas med hjälp av gradienten till h,

$$\operatorname{grad} h = (h'_x, h'_y, h'_z).$$

Vi har att $h'_x(x, y, z) = h'_y(x, y, z) = e^{-z}$ och $h'_z(x, y, z) = -(x + y)e^{-z}$. Vi beräknar gradientvektorn i punkten $(1, 1, 0)$ till

$$\operatorname{grad} h(1, 1, 0) = (1, 1, -2).$$

a) Vektorn från $(1, 1, 0)$ till punkten $(0, 0, 1)$ är vektorn $(-1, -1, 1)$ och efter normering får vi en enhetsriktningsvektor $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)$ Vi beräknar

$$h'_{\mathbf{v}}(1, 1, 0) = \operatorname{grad} h(1, 1, 0) \cdot \mathbf{v} = (1, 1, -2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1) = -\frac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

b) I en given punkt växer en deriverbar funktion snabbast i gradientens riktning.

Svar: a) $-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ b) I riktningen som ges av vektorn $(1, 1, -2)$