KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2
Måndagen den 14 februari, 2011

(1) Låt $\mathbf{u} = (1, 2)$ och $\mathbf{v} = (1, 1)$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^2$.

(a) Visa att vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ utgör en bas B för $\mathbf{R}^2$. **(2)**

(b) Linjen L har ekvationen $2x - y = 1$ när den uttrycks i koordinaterna (x, y) med avseende på standardbasen i $\mathbb{R}^2$. Bestäm ekvationen för linjen om den uttrycks i koordinaterna (x', y') med avseende på basen B. **(2)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

(a) Eftersom det är två vektorer och $\mathbb{R}^2$ är tvådimensionellt är det samma sak att kolla att de utgör en bas som att kolla att de är linjärt oberoende. Detta kan vi exempelvis göra genom att beräkna determinanten av matrisen med dessa vektorer som rader. Vi får

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1$$

och eftersom determinanten är skild från noll är vektorerna linjärt oberoende och utgör en bas för $\mathbb{R}^2$.

(b) Vi kan skriva up basbytesmatrisen från basen B till standardbasen som

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Om (x', y') avser koordinaterna med avseende på basen B får vi därmed att

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

När vi nu sätter in detta i ekvationen för linjen får vi

$$2x - y = 1 \iff 2(x' + y') - (2x' + y') = 1 \iff y' = 1.$$

(2) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning sådan att

$$T(1, 2) = (3, 1, 2) \quad \text{och} \quad T(1, 1) = (1, 1, 3).$$

(a) Bestäm standardmatrisen för T. **(3)**

(b) Bildrummet (eng. *range*) till T utgör ett plan W i $\mathbb{R}^3$. Bestäm en ekvation för W. **(1)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

(a) Eftersom $\mathbf{f}_1 = (1,2)$ och $\mathbf{f}_2 = (1,1)$ inte är parallella är de linjärt oberoende och utgör en bas för $\mathbb{R}^2$ och vi kan använda basbytesmatrisen för att uttrycka standardbasvektorerna i denna bas.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + r_2 \\ -r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Med andra ord kan vi skriva $\mathbf{e}_1 = -\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$.
Därmed kan vi beräkna bilderna av standardbasvektorerna under avbildningen T som

$$T(\mathbf{e}_1) = T(-\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2) = -T(\mathbf{f}_1) + 2T(\mathbf{f}_2) = -(3,1,2) + 2(1,1,3) = (-1,1,4)$$

och

$$T(\mathbf{e}_2) = T(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2) = T(\mathbf{f}_1) - T(\mathbf{f}_2) = (3,1,2) - (1,1,3) = (2,0,-1).$$

Dessa vektorer utgör kolonnerna i standardmatrisen för T som därmed är

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) För att hitta en ekvation för planet W som går genom origo räcker det att hitta en normalvektor. Denna normalvektor ska vara ortogonal mot alla vektorer i W och vi kan få en sådan genom att bilda kryssprodukten av två vektorer som ligger i W, till exempel de två givna vektorna $\mathbf{u} = (3,1,2)$ och $\mathbf{v} = (1,1,3)$. Vi får

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 1, 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3, 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = (1,-7,2).$$

En ekvation för planet ges därmed av $x - 7y + 2z = 0$.

(3) För de tre vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ gäller att

$$\begin{cases} \mathbf{u} + 2\mathbf{v} - \mathbf{w} = (1,2,3), \\ \mathbf{u} + 3\mathbf{v} - 2\mathbf{w} = (0,1,1), \\ 2\mathbf{u} + \mathbf{v} + 2\mathbf{w} = (1,0,1). \end{cases}$$

Avgör om vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. **(4)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

De tre vektorerna $\mathbf{g}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{g}_2 = (0,1,1)$ och $\mathbf{g}_3 = (1,0,1)$ är linjärt beroende som vi kan se genom Gausselimination på matrisen med dessa som kolonner:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 - r_1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 - 2r_2 \\ r_2 \\ r_3 + 2r_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Genom att se på nollrummet till denna matris ser vi att de tre vektorerna alla är ortogonal mot vektorn $(1,1,-1)$ ligger därmed i planet med ekvation $x + y - z = 0$.

Å andra sidan är matrisen som ger relationen mellan $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ med vektorerna $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ inverterbar, eftersom

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 - 2r_2 \\ r_2 \\ r_3 + 3r_2 \end{bmatrix}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_3 \\ r_2 + r_3 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Alltså kan vi uttrycka vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ som

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 8\mathbf{g}_1 - 5\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{v} = -6\mathbf{g}_1 + 4\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{w} = -5\mathbf{g}_1 + 3\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3 \end{cases}$$

vilket visar att de också ligger i planet med ekvation $x + y - z = 0$.

Svar:

(1) (b) Linjens ekvation är $y' = 1$ i de nya koordinaterna.

(2) (a) Standardmatrisen för T ges av $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Ekvationen för planet ges av $x - 7y + 2z = 0$.

(3) De tre vektorerna utgör inte en bas för $\mathbb{R}^3$.

Preliminära bedömningskriterier

Mindre räknefel ger i allmänhet inget avdrag, om de inte väsentligen förändrar karaktären hos uppgiften. För mer än två poäng på en uppgift krävs att det finns förklarande text. För full poäng krävs att lösningen är välpresenterad med bra förklarande text till beräkningarna.

(1) (a)
- Korrekt motivering till att vektorerna spänner upp $\mathbb{R}^2$, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till att vektorerna är linjärt oberoende, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt koordinattransformation, **1 poäng**.
- Korrekt beräknad ekvation, **1 poäng**.

(2) (a)
- Korrekt princip för att bestämma standardmatrisen, **1 poäng**.
- Korrekt beräknad bild av en standardbasvektor, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av standardmatrisen, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt beräknad ekvation, **1 poäng**.

(3)
- Korrekt princip för att avgöra om vektorerna är linjärt oberoende, **1 poäng**.
- Korrekt användning av relationerna för att uttrycka $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i de givna vektorena, **1 poäng**.
- Korrekt kontroll av att de givna vektorerna är linjärt beroende, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd kontroll av att $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ inte är en bas för $\mathbb{R}^3$, **1 poäng**.