KTH Matematik

Kontrollskrivning 2 SF1626 Flervariabelanalys 2011
Onsdagen 16 februari kl 08.15 – 09.45
Svar och lösningsförslag

Inga hjälpmedel tillåtna

Lycka till!

1. Bestäm det största och det minsta värde som antas av funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$ på den slutna triangel som har sina hörn i punkterna $(0,0)$, $(4,0)$ och $(0,4)$.

Lösning: Funktionen är kontinuerlig och det aktuella området är kompakt, vilket medför att ett största och ett minsta värde säkert antas. Extremvärden antas antingen i det inre av området, som då måste vara en kritisk punkt eftersom funktionen är deriverbar, eller i en punkt på randen.
Eftersom $f'_x(x,y) = 2x-2$ och $f'_y(x,y) = 2y-4$ följer att punkten $(1,2)$, som ligger i det inre av triangeln, är enda kritiska punkt, och där är funktionsvärdet $f(1,2) = 0$.
Vi undersöker nu f:s värden på randen, först längs kanterna exklusive hörnen, och sedan i hörnen.
På kanten $y = 0$, $0 < x < 4$, har vi att

$$f(x,0) = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4\,,$$

så f saknar här största värde, och minsta värde ges av $f(1,0) = 4$.
På kanten $x = 0$, $0 < y < 4$, har vi att

$$f(0,y) = y^2 - 4y + 5 = (y-2)^2 + 1\,,$$

så f saknar också här största värde, och minsta värde ges av $f(0,2) = 1$.
Den tredje kanten ges av $y = 4 - x$, $0 < x < 4$. Där gäller att

$$f(x,y) = f(x, 4-x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,,$$

så även här saknas största värde, och minsta värde ges av $f(3/2, 5/2) = 1/2$.
Slutligen beräknar vi funktionsvärdena i hörnpunkterna:

$$f(0,0) = 5\,, \quad f(4,0) = 13 \quad \text{och} \quad f(0,4) = 5.$$

Vi jämför funktionsvärdena i den kritiska punkten, längs kanterna och i hörnen, och finner att största värdet är $f(4,0) = 13$ och minsta värdet är $f(1,2) = 0$.
Svar: Största värdet är $f(4,0) = 13$ och minsta värdet är $f(1,2) = 0$.

2. a) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_T (1-x-y)\,dxdy\,,$$

där T är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,2)$. (2 p)

b) Bestäm det område D i första kvadranten som gör att dubbelintegralen

$$\iint_D (1-x-y)\,dxdy$$

får så stort värde som möjligt. (2 p)

Lösning: a) T beskrivs av olikheterna $0 < x < 2$ och $0 < y < 2-x$. Därför gäller att

$$\iint_T (1-x-y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (1-x-y)\,dy\right)\,dx = \int_0^2 \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x} dx$$
$$= \int_0^2 (2-x) - x(2-x) - \frac{1}{2}(2-x)^2\,dx = -\frac{2}{3}$$

b) Integralen blir så stor som möjligt om integrationsområdet är det största område i första kvadranten där integranden är positiv, dvs det område som bestäms av villkoren $x > 0$, $y > 0$ och $x + y < 1$, dvs en triangel med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$.

Svar: a) $-\dfrac{2}{3}$ b) Triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$.

3. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_R xy\,dxdy\,,$$

där området R ges av olikheterna $x < 0$, $y < 0$ och $1 < x^2 + y^2 < 4$.

Lösning: Vi byter till polära koordinater $x = r\cos v$ och $y = r\sin v$. Området R motsvaras då av området S som ges av $1 < r < 2$ och $\pi < v < 3\pi/2$. Vi får då

$$\iint_R xy\,dxdy = \iint_S (r\cos v)(r\sin v)\,r dr dv = \int_1^2 r^3\,dr \int_\pi^{3\pi/2} \cos v \sin v\,dv$$
$$= \int_1^2 r^3\,dr \int_\pi^{3\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2v\,dv = \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \left[-\frac{1}{4}\cos 2v\right]_\pi^{3\pi/2} = \frac{15}{8}.$$

Svar: $\dfrac{15}{8}$