SF1626 Flervariabelanalys
Modelltentamen 1
Läsåret 2010/11

Skrivtid: 5 timmar
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

(1) Låt $f(x,y) = x^2 + y - 2$.

a) Skissera nivåkurvorna $f(x,y) = C$ för $C = 0, 1, 2$.

b) Bestäm grad $f(0,2)$ och grad $f(1,1)$, och rita också in dem i figuren i (a).

c) Bestäm alla enhetsvektorer $\mathbf{v}$ sådan att $D_{\mathbf{v}} f(0,2) = 0$

(2) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_T x e^{xy}\, dx dy$$

då T är det område som begränsas av kurvorna $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ och $xy = 1$.

(3) a) Visa att $U(x,y) = \dfrac{1}{2} \ln(1 + x^2 + y^2)$ är en potentialfunktion till $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{x}{1+x^2+y^2}, \dfrac{y}{1+x^2+y^2}\right)$.

b) Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}$ är som i a) och γ är den del av kurvan $y = x^2$ som går från punkten $(0,0)$ till punkten $(1,1)$.

Del B

(4) Bestäm andra ordningens Taylorpolynom till $f(x,y) = xy - x - y - 2\cos(x - y)$ kring punkten $(x,y) = (1,1)$, och avgör med hjälp av detta om f har ett lokalt extremvärde i denna punkt.

(5) Förklara varför man kan vara säker på att funktionen $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$ antar ett största och minsta värde på cirkelskivan $D = \{(x,y); x^2+y^2 \le 1\}$. Bestäm också dessa.

(6) Beräkna volymen av den kropp som begränsas av planet $z = 3-2y$ och paraboloiden $z = x^2 + y^2$.

Del C

(7) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, (x^2 + y^2)z^2)$ ut ur den cylinder som bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 4$ och $0 \leq z \leq 1$.

(8) En rätvinklig låda utan lock skall tillverkas. Sidornas sammanlagda area får inte överstiga en kvadratmeter. Hur skall lådan dimensioneras för att dess volym skall bli så stor som möjligt?

(9) Den fyllda ellipsoiden

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

där a, b och c är positiva konstanter, beskrivs i nya koordinater (R, ϕ, θ)

$$\begin{cases} x = aR\cos\phi\sin\theta \\ y = bR\sin\phi\sin\theta \\ z = cR\cos\theta \end{cases}$$

av olikheterna $0 \leq R \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ och $0 \leq \theta \leq \pi$. Beräkna volymen av E.