Modelltentamen 1 SF1626 2010-11

SVAR och LÖSNINGSFÖRSLAG

1. $f(x,y) = x^2 + y - 2$

a) $C = 0$ ger nivåkurvan $x^2 + y - 2 = 0$

$\iff y = 2 - x^2$

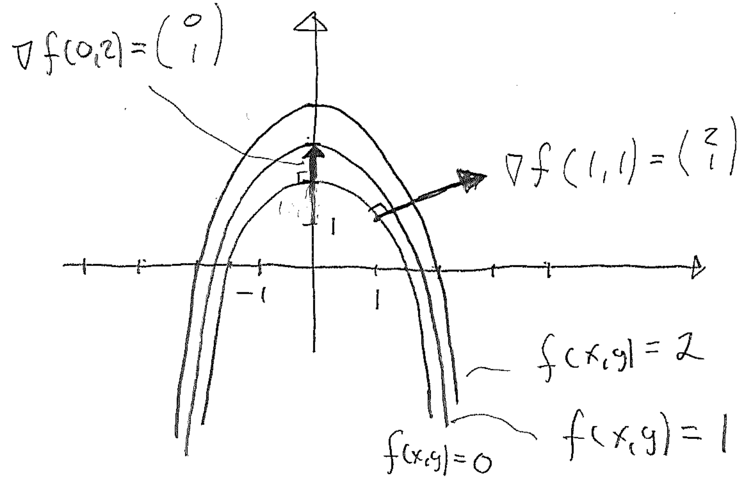
$C = 1$ ger $x^2 + y - 2 = 1 \iff y = 3 - x^2$

$C = 2$ ger $x^2 + y - 2 = 2 \iff y = 4 - x^2$

b) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^t = (2x, 1)^t$

så $\nabla f(0,2) = (0,1)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\nabla f(1,1) = (2,1)^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

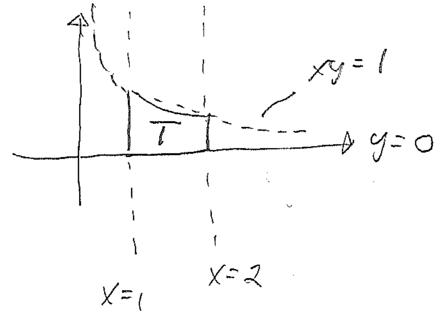


c) Vi söker $\bar{v} = (\alpha, \beta)$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ sådan att

$(D_{\bar{v}} f)(0,2) = 0 \iff \nabla f(0,2) \cdot \bar{v} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$

$\iff \bar{v} = (\alpha, \beta) = \underline{\underline{(\pm 1, 0)}}$: SVAR

2. $I = \iint_T x e^{xy}\, dx\, dy$



Det är fördelaktigt att först integrera m.a.p. y.

Vi beskriver därför T som $T: \begin{array}{l} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1/x \end{array}$

$I = \int_1^2 \left\{ \int_0^{1/x} x e^{xy}\, dy \right\} dx = \int_1^2 \left[e^{xy} \right]_{y=0}^{1/x} dx$

$= \int_1^2 (e - 1)\, dx = (2-1)(e-1) = \underline{\underline{(e-1)}}$: SVAR

3. a) $U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}(1+x^2+y^2) =$$

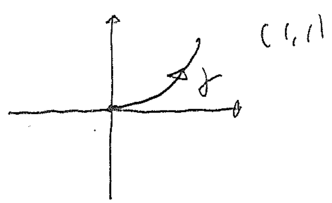
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{x}{1+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \{\text{på samma sätt}\} = \frac{y}{1+x^2+y^2}$$

Alltså $\bar{F}(x,y) = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}\right) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = \text{grad}\, U$

V.S.B.

b)



$$\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_\gamma \text{grad}\, U \cdot d\bar{r} = \left\{\begin{array}{l}\bar{F} = \text{grad}\, U \text{ i} \\ \text{omgivning till } \gamma \\ \Rightarrow \text{"oberoende av väg"}\end{array}\right\}$$

$$= U\{\text{ändpkt}\} - U\{\text{startpkt}\}$$

$$= U(1,1) - U(0,0) = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln 3}} \; : \; \underline{\text{SVAR}}$$

4. $f(x,y) = xy - x - y - 2\cos(x-y)$, $f(1,1) = -3$

$f'_x(x,y) = y - 1 + 2\sin(x-y) \qquad f'_x(1,1) = 0$

$f'_y(x,y) = x - 1 - 2\sin(x-y) \qquad f'_y(1,1) = 0$

$f''_{xx} = 2\cos(x-y) \qquad f''_{xx}(1,1) = 2$

$f''_{xy} = 1 - 2\cos(x-y) \qquad f''_{xy}(1,1) = -1$

$f''_{yy} = 2\cos(x-y) \qquad f''_{yy}(1,1) = 2$

2:a ord Taylorpol. i (1,1)

Resttern

Taylors formel ger: $f(x,y) = P_2^{(1,1)}(x,y) + R_3^{(1,1)}(x,y)$

$$P_2^{(1,1)}(x,y) = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) + f''_{yy}(1,1)(y-1)^2\right)$$
$$= \underline{-3 + (x-1)^2 - (x-1)(y-1) + (y-1)^2}$$

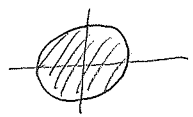
Vi sätter $h = x-1$ och $k = y-1$

$$P_2^{(1,1)} = -3 + h^2 - hk + k^2 =$$
$$= -3 + \left(h - \tfrac{1}{2}k\right)^2 + \tfrac{3}{4}k^2 \geq -3$$

Varav följer $(x,y) = (1,1)$ är en minimipunkt, ty $f_x(1,1) = f_y(1,1) = 0$ och andragrads termerna i P_2 utgör en positivt definit kvadratisk form

$\boxed{\text{SVAR: } P_2^{(1,1)}(x,y) = -3 + (x-1)^2 - (x-1)(y-1) + (y-1)^2. \;\; (1,1) \text{ är ett lokalt minimum}}$

(5.) $f(x,y) = (x+y)e^{-x-y}$ på $D = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leq 1\}$



$\left.\begin{array}{l} f \text{ kontinuerlig på } D \\ D \text{ är kompakt (slutet och begränsat)} \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f$ antar största och minsta värde på D.

Eftersom f är deriverbar (i det inre av D) måste extremvärden antas

(i) i inre kritisk punkt, eller

(ii) på randen till D.

(i) $f'_x = e^{-x^2-y^2} + (-2x)(x+y)e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2-y^2}(1-2x(x+y))$

$f'_y = e^{-x^2-y^2}(1-2y(x+y))$

(x,y) kritisk pkt $\Longleftrightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \overset{e^{-x^2-y^2} \neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 1-2x(x+y)=0 \\ 1-2y(x+y)=0 \end{cases}$ (*)

(*) $\Longrightarrow \begin{cases} 1-2x(x+y) = 1-2y(x+y) \\ x, y \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x(x+y) = 2y(x+y) \\ x, y \neq 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow x = y$.

(*) $\Rightarrow x+y \neq 0$

(*) & $x=y$ ger $1-2x(2x)=0 \Leftrightarrow 4x^2=1 \Leftrightarrow x = \pm 1/2$

dvs $(x,y) = \pm(1/2, 1/2)$ är inre kritiska punkter

<u>OBS:</u> $\pm(1/2, 1/2) \in D = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leq 1\}$

(5.) forts.

(ii) Randen till $D = \{(x,y);\ x^2+y^2=1\} =$ parametriseras som $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$

Studera f på randen:

$h(t) \overset{\text{def}}{=} f(\cos t, \sin t) = (\cos t + \sin t)e^{\overbrace{-\cos^2 t - \sin^2 t}^{=-1}}$

$= 1/e\,(\cos t + \sin t)$

$h'(t) = 1/e\,(-\sin t + \cos t)$

så $h'(t) = 0 \Longleftrightarrow \sin t = \cos t \Longleftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{5\pi}{4}$

(vilket motsvarar $(x,y) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ resp. $(x,y) = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$)

Vi jämför slutligen f:s värden i inre kritiska punkter och i punkter på randen som ger extremvärden på randen.

$f(1/2, 1/2) = (1/2 + 1/2)e^{-1/4-1/4} = e^{-1/2}$

$f(-1/2, -1/2) = (-1/2 - 1/2)e^{-1/4-1/4} = -e^{-1/2}$

$f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2})e^{-1} = \sqrt{2}e^{-1}$

$f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}e^{-1}$

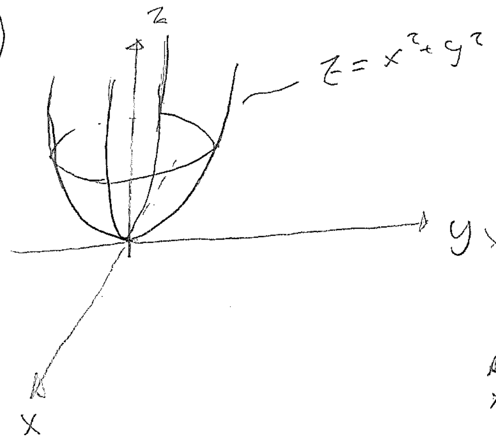
Eftersom $\sqrt{2}e^{-1} = \sqrt{2}e^{-1/2} \cdot e^{-1/2} = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{e}}}_{<1} e^{-1/2} < e^{-1/2}$

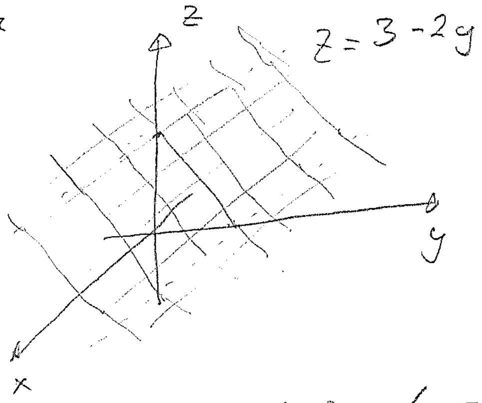
fås

<u>SVAR:</u> $f_{max} = f(1/2, 1/2) = e^{-1/2}$

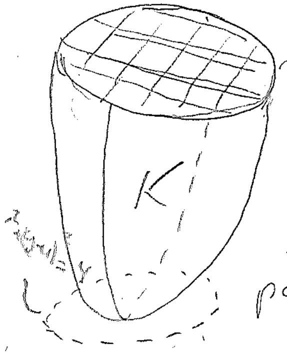
$f_{min} = f(-1/2, -1/2) = -e^{-1/2}$

6.





Den kropp som begränsas av dessa två ytor blir en "parabolisk skål" med ett lock bestående av en del av planet $z = 3-2y$



Skärningskurva $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 3-2y \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 3-2y \Leftrightarrow x^2+y^2+2y = 3$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 4$

$\Rightarrow$ skärningskurvan projiceras ortogonalt på xy-planet på cirkeln $x^2+(y+1)^2 = 4$

Kroppen K beskrivs alltså

av $K: \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq 4 \\ x^2+y^2 \leq z \leq 3-2y \end{cases}$

$$Vol(K) = \iiint_K dV = \iint_{x^2+(y+1)^2\leq 4} \left(3-2y - (x^2+y^2)\right) dxdy$$

$$= \iint_{x^2+(y+1)^2 \leq 4} 4 - x^2 - (y+1)^2 \, dxdy = \quad \begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \leq r \leq 2 \\ y+1 = r\sin\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

6 forts.

$$= \iint_{\substack{0\leq r\leq 2 \\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} (4-r^2)\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^2 4r - r^3 \, dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2$$

$$= 2\pi \left(8 - \frac{2^4}{4}\right) = 8\pi$$

Svar: Volymen är 8π V.e.

7. $\bar{F}(x,y,z) = (P,Q,R) = (xy^2, x^2y, (x^2+y^2)z^2)$

Cylindern C: $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$

Flödet ut ur C = $\iint_S \bar{F} \cdot \hat{n}\, dS \overset{\text{Gauss}}{\underset{\text{sats}}{=}} \iiint_C \operatorname{div} \bar{F}\, dV$

$= \left\{ \operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y^2 + x^2 + 2z(x^2+y^2) = (2z+1)(x^2+y^2) \right\}$

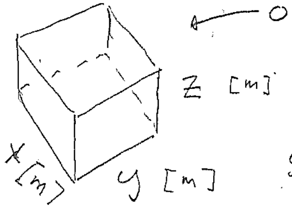
$$= \iiint_{\substack{x^2+y^2 \le 4 \\ 0 \le z \le 1}} (2z+1)(x^2+y^2)\, dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2 \le 4} (x^2+y^2) \left(\int_0^1 (2z+1)\, dz \right) dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 4} (x^2+y^2) \underbrace{\left[z^2+z \right]_0^1}_{=2} dx\,dy = 2 \iint_{x^2+y^2 \le 4} (x^2+y^2)\, dx\,dy$$

$$= 2 \iint_{\substack{0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi}} r^2\, r\,dr\,d\theta = 2 \cdot 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 16\pi$$

<u>Svar</u>: 16π

8.



← öppen ovansida i figur

Volym $= V(x,y,z) = xyz$ [m^3]

Sidarea $= A(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ [m^2]

Vi kan anta att

$$A(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz = 1$$

och $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Av detta följer att

$x = R > 0 \Rightarrow y \leq \frac{1}{R}, \; z \leq \frac{1}{2R} \leq \frac{1}{R}$

$y = R > 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{R}, \; z \leq \frac{1}{2R} \leq \frac{1}{R}$

$z = R > 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2R} \leq \frac{1}{R}, \; y \leq \frac{1}{2R} \leq \frac{1}{R}$

dvs om någon av $x, y, z = R$ följer att $V \leq R \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{1}{R}$.

Vi kan därför formulera bivillkoren som

$$\begin{cases} A(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz = 1 \\ 0 \leq x, y, z \leq R \end{cases}$$

- Det definierar en kompakt delmängd av $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ den kontinuerliga funk. V har säkert största och minsta värde på denna mängd.

- Om $x = 0$, $y = 0$ eller $z = 0$ $\Rightarrow V = 0$ och om $x = R$, $y = R$ eller $z = R$ $\Rightarrow V \leq 1/R$, där R kan väljas godtyckligt stort.

Alltså måste maximum antas i någon inre punkt av ovan definierade kompakta ytstycke.

En sådan punkt kan bestämmas med Lagranges metod:

$$\begin{cases} \text{grad } V = \lambda \text{ grad } A \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y+2z \\ x+2z \\ 2x+2y \end{pmatrix} & (1) \\ A = 1 & (2) \end{cases}$$

8 forts.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} yz = \lambda(y+2z) & (1a) \\ xz = \lambda(x+2z) & (1b) \\ xy = \lambda(2x+2y) & (1c) \end{cases}$$

OBS: $x, y, z \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$

(1a) och (1b) ger $\frac{yz}{xz} = \frac{\lambda(y+2z)}{\lambda(x+2z)} \Leftrightarrow y(x+2z) = x(y+2z)$

$\Leftrightarrow \cancel{xy} + 2yz = \cancel{xy} + 2xz \Leftrightarrow \underline{\underline{x = y}}$

(1a) och (1c) ger på mots sätt

$$\frac{yz}{xy} = \frac{\lambda(y+2z)}{2\lambda(x+y)} \Leftrightarrow \cancel{2xz} + 2yz = xy + \cancel{2xz}$$

$\Leftrightarrow x = 2z$.

$x = y = 2z$ insatt i $A = 1$ ger

$(2z)^2 + 2 \cdot 2z \cdot z + 2 \cdot 2z \cdot z = 1 \Leftrightarrow 12z^2 = 1$

$\Leftrightarrow z = 1/\sqrt{12} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

<u>SVAR:</u> Lådan skall dimensioneras (om vi placerar öppningen uppåt) med en kvadratisk bottenyta med sidlängd $1/\sqrt{3}$ m, och en höjd om $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ m.

9.

$$Vol(E) = \iiint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} dV$$

Med nya koordinater (R, φ, θ) där

$$\begin{cases} x = aR\cos\varphi\sin\theta \\ y = bR\sin\varphi\sin\theta \\ z = cR\cos\theta \end{cases}$$

$$E = \{(x,y,z);\ x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \le 1\}$$
$$= \{(R,\varphi,\theta);\ 0 \le R \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\}$$

Vi ~~får~~

$$Vol(E) = \iiint\limits_{\substack{0\le R\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\theta\le\pi}} \left|\frac{d(x,y,z)}{d(R,\varphi,\theta)}\right| dR\,d\varphi\,d\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial R} = a\cos\varphi\sin\theta \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -aR\sin\varphi\sin\theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = aR\cos\varphi\cos\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial R} = b\sin\varphi\sin\theta \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = bR\cos\varphi\sin\theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = bR\sin\varphi\cos\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial R} = c\cos\theta \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -cR\sin\theta$$

9 forts.

Alltså är

$$\frac{d(x,y,z)}{d(R,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi\sin\theta & -aR\sin\varphi\sin\theta & aR\cos\varphi\cos\theta \\ b\sin\varphi\sin\theta & bR\cos\varphi\sin\theta & bR\sin\varphi\cos\theta \\ c\cos\theta & 0 & -cR\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= abcR^2 \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \end{vmatrix}$$

utveckla längs rad 3

$$= abcR^2\Big(\cos\theta\big(\underbrace{-\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta}_{-\sin\theta\cos\theta}\big) - \sin\theta\big(\underbrace{\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta}_{\sin^2\theta}\big)\Big)$$

$$= abcR^2\big(\underbrace{-\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta\sin^2\theta}_{-\sin\theta}\big) =$$

$$= -abcR^2\sin\theta$$

Alltså är $Vol(E) = \iiint\limits_{\substack{0\le R\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\theta\le\pi}} abcR^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi$

$$= abc\Big(\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\Big)\Big(\underbrace{\int_0^1 R^2\,dR}_{1/3}\Big)\Big(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\Big) = \frac{2}{3}\pi abc\big[-\cos\theta\big]_0^{\pi}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}abc}}$$

Svar: Volymen är $\frac{4\pi}{3}abc$ [v.e.]