SF1626 Flervariabelanalys
Modelltentamen 2
Läsåret 2010/11

Skrivtid: 5 timmar
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

(1) Låt $f(x,y) = xe^{x-y}$. Bestäm en ekvation för tangentplanet till grafen $z = f(x,y)$ i den punkt där $(x,y) = (1,1)$. Ange också med hjälp av tangentplanets ekvation ett approximativt värde till $f(11/10, 9/10)$.

(2) Temperaturen i en triangel i xy-planet beskrivs av funktionen $T(x,y) = 100 + 10\sin x \cos y$. Triangeln begränsas av x-axeln, y-axeln och linjen $x + y = 2\pi$. Var i triangeln är temperaturen som störst och var är den som minst?

(3) Beräkna trippelintegralen $\iiint_K x\,dxdydz$ då K är det område som begränsas av planen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ och $x + y + z = 1$.

Del B

(4) I vilken riktning i punkten $(2,0)$ har funktionen $f(x,y) = xy$ en riktningsderivata som är -1? Finns det någon riktning sådan att f:s riktningsderivata i denna punkt är 3?

(5) Ytan S_R som ges av ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, där R är en positiv konstant, kan parametriseras på följande sätt.

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\phi \\ y = R\sin\theta\sin\phi \\ z = R\cos\phi \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \pi.$$

a) Beskriv ytan S_R med ord, och förklara den geometriska innebörden av parametrarna θ och ϕ.

b) Beräkna arean av ytan S_R med hjälp av en ytintegral.

(6) Beräkna på två olika sätt kurvintegralen $\oint_\gamma xy\,dx + xy\,dy$ där γ är randen till triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$ genomlöpt moturs.

Del C

(7) a) Visa genom att använda implicita funktionssatsen att lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ xy + yz = 0 \end{cases}$$

innehåller en kurva genom punkten $(0, 0, 1)$ av formen $\mathbf{r}(t) = (t, h(t), g(t))$.

b) Bestäm ekvationen för denna kurva. Denna deluppgift kan lösas obereoende av del a).

(8) För ett visst svängande trumskinn, givet av $x^2 + y^2 \leq R^2$, gäller att svängningsamplituden $u(x, y)$ uppfyller Helmholtz ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c^2 u = 0$$

där c är en konstant. Av symmetriskäl kan man förvänta sig lösningar av formen $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. Visa att en sådan lösning f måste uppfylla differentialekvationen

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + c^2 f(r) = 0.$$

(9) a) Formulera Gauss sats för flödesintegraler i rummet.
b) Ge en fysikalisk tolkning av Gauss sats.
c) Bevisa Gauss sats i det speciallfall som utgörs av flödet av ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), 0, 0)$ ut ur en låda av formen $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
