Modelltentamen 2 SF1626 2010-11

Svar & Lösningsförslag

1. $f(x,y) = x e^{x-y}$

Tangentplanet till $z = f(x,y)$ i punkten $(a, b, f(a,b))$ ges av $z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$

$f'_x = e^{x-y} + x e^{x-y}$ $\quad f'_x(1,1) = e^0 + 1\cdot e^0 = 2$

$f'_y = -x e^{x-y}$ $\quad f'_y(1,1) = -1$

Vidare är $f(1,1) = 1\, e^0 = 1$.

Tangentplanet till $z = f(x,y)$ i $(1,1,1)$ ges av

$$z = 1 + 2(x-1) - 1(y-1) = 2x - y$$

dvs $z = 2x - y$

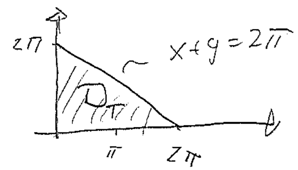
Linjär approximation av $f(11/10, 9/10)$ ger

$$f(11/10, 9/10) \approx f(1,1) + f'_x(1,1)(11/10 - 1) + f'_y(1,1)(9/10 - 1)$$
$$= 1 + 2\cdot 1/10 - 1(-1/10) = 13/10$$

Svar: Tangentplan i $(x,y,z) = (1,1,f(1,1))$ ges av $z = 2x - y$

$f(11/10, 9/10) \approx 13/10$

2. $T(x,y) = 100 + 10\sin x \cos y$



T är en kontinuerlig och deriverbar funktion, D_T är kompakt. $\Rightarrow$

- T antar största o minsta värde på D_T
- Detta sker antingen i
  - I. kritisk inre punkt
  - II. randpunkt som är kritisk för T:s restriktion till randen
  - III. i en hörnpunkt

I. $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 10\cos x \cos y$, $\quad \dfrac{\partial T}{\partial y} = -10 \sin x \sin y$

$\Rightarrow$ Inre kritiska punkter ges av $\begin{cases}\cos x \cos y = 0 \\ \sin x \sin y = 0\end{cases}$,

$\Longleftrightarrow \begin{cases}\cos x = 0 \\ \sin y = 0\end{cases}$ eller $\begin{cases}\cos y = 0 \\ \sin x = 0\end{cases}$ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pi/2 \\ y = \pi\end{cases}$ eller $\begin{cases} x = \pi \\ y = \pi/2\end{cases}$

$\Updownarrow$ $\quad T(\pi/2, \pi) = 100 - 10 = 90$

$\Updownarrow$ $\quad T(\pi, \pi/2) = 100$

II. • $0 < x < 2\pi$, $y = 0$: $\quad h(x) = T(x,0) = 100 + 10 \sin x$

h har max för $x = \pi/2$, $\quad T(\pi/2, 0) = 110$

h har min för $x = 3\pi/2$ $\quad T(3\pi/2, 0) = 90$

(2.) forts

• $x=0 \quad 0 < y \leq 2\pi.$

$g(y) = \underline{T(0,y)} = 100 + 10 \sin 0 \cos y = \underline{100}$

• $x+y=2\pi, \quad x,y>0. \qquad y = 2\pi - x$

$k(x) = T(x, 2\pi - x), \quad 0 < x < 2\pi$

$k(x) = 100 + \sin x \cos(2\pi - x)$

$k'(x) = \cos x \cos(2\pi - x) + \sin x \sin(2\pi - x)$

$= \cos(x - (2\pi - x)) = \cos(2x - 2\pi)$

$k'(x)=0 \Rightarrow \cos(2x-2\pi) \Leftrightarrow 2x - \cancel{2\pi} = \begin{cases} \pi/2 + n\cdot 2\pi \\ 3\pi/2 + n\cdot 2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} \pi/4 + n\cdot\pi \\ 3\pi/4 + n\cdot\pi \end{cases}$

$T(\pi/4, 7\pi/4) = k(\pi/4) = 100 + \overset{10}{\cancel{5}} \sin \pi/4 \cos 7\pi/4 = 105$

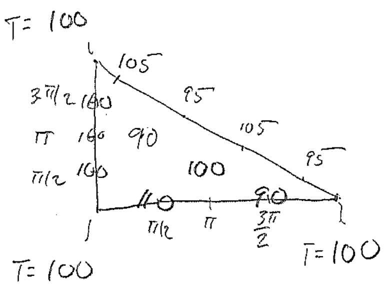
$T(3\pi/4, 5\pi/4) = k(3\pi/4) = 100 + 10 \sin 3\pi/4 \cos 5\pi/4 = 95$

$T(5\pi/4, 3\pi/4) = k(5\pi/4) = 100 + 10 \sin 5\pi/4 \cos 3\pi/4 = 105$

$T(7\pi/4, \pi/4) = k(7\pi/4) = 100 + 10 \sin 7\pi/4 \cos \pi/4 = 95$

(III) I hörnpunkterna är $x=0$ eller $x=2\pi$

$\Rightarrow T(\text{hörnpunkt}) = 100$



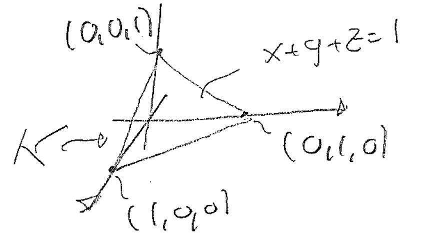
__Svar:__ Största värde = 110

antas i $(\pi/2, 0)$

Minsta värde = 90

antas i $(\pi/2, \pi)$ och $(3\pi/2, 0)$

(3.) $I = \iiint_K x \, dx\,dy\,dz$



K beskrivs av olikheterna

$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x, \quad 0 \leq z \leq 1-x-y$

dvs $I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} \int_{z=0}^{1-x-y} x \, dz\,dy\,dx$

$= \int_0^1 \int_0^{1-x} x \left[z\right]_0^{1-x-y} dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy\,dx$

$= \int_0^1 x \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx =$

$= \int_0^1 x \left[(1-x) - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2\right] dx =$

$= \int_0^1 x \left[1 - x - x + x^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + x\right] dx =$

$= \int_0^1 x \left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2\right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2} - x^2 + \frac{1}{2}x^3\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} =$

$= \frac{6-8+3}{24} = \underline{\underline{1/24}}$

__Svar:__ $\underline{\underline{1/24}}$

4.

$f(x,y) = xy$

Riktningsderivatan i $(2,0)$ i en riktning $\bar{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $|\bar{v}| = 1$, ges av

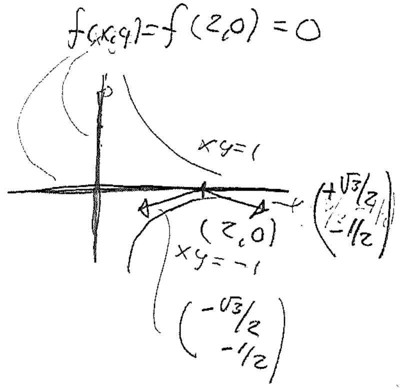
$$(D_{\bar{v}} f)(2,0) = \bar{v} \cdot \operatorname{grad} f(2,0) =$$

$$= \left\{ \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix},\ \operatorname{grad} f(2,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\beta$$

så $(D_{\bar{v}} f)(2,0) = -1$ omm $\beta = -1/2$

$$\Rightarrow \alpha = \pm \sqrt{3}/2$$



Eftersom villkoret

$|\bar{v}| = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$

$\Rightarrow |\beta| \le 1$,

och $2\beta = 3 \Rightarrow \beta = 3/2$

finns ingen riktning $\bar{v}$ s.a. $(D_{\bar{v}} f)(2,0) = 3$

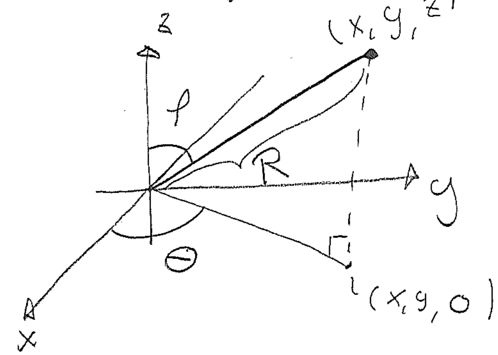
<u>Svar:</u> $(D_{\bar{v}} f)(2,0) = -1$ omm $\bar{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

$(D_{\bar{v}} f)(2,0) \neq 3$ för alla $\bar{v}$.

5.

a) $x^2+y^2+z^2 = R^2$ är ekvationen för en sfär med radie R och medelpunkt i origo.

Låt (x,y,z) vara en punkt på sfären. Betydelsen av θ, φ och R framgår av följande figur



dvs φ = vinkeln mellan positiva z-axeln och ortsvektorn $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad (0 \le \varphi \le \pi)$

θ = vinkeln moturs mellan positiva x-axeln och ortsvektorns projektion på xy-planet

R = sfärens radie $= \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

b)

$$A = \iint_{S_R} dS = \iint_{\substack{0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi}} |\bar{r}_\theta \times \bar{r}_\varphi|\, d\theta\, d\varphi$$

där $\bar{r} : (\theta, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix}$

5b forts.

$$\bar r_\theta = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar r_\varphi = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar r_\theta \times \bar r_\varphi = -R^2 \begin{pmatrix} \cos\theta\sin^2\varphi \\ \sin\theta\sin^2\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\bar r_\theta \times \bar r_\varphi| = R^2\sqrt{\cos^2\theta\sin^4\varphi + \sin^2\theta\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$

$$= R^2\sqrt{\sin^2\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = R^2|\sin\varphi|$$

$$\underset{0\le\varphi\le\pi}{=} R^2\sin\varphi$$

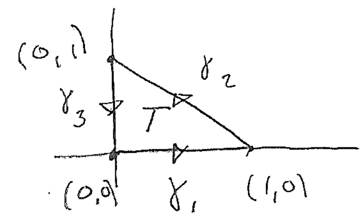
Alltså får vi

$$A = \iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi}} R^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = R^2\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi$$

$$= 2\pi R^2 \underbrace{\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi}}_{=2} = 4\pi R^2$$

__Svar (5b):__ $4\pi R^2$

6.



T är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$.

$\gamma = \partial T$ tagen moturs.

__Metod I__ (parametrisering av γ).

Dela upp $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ enligt figur. Vi parametriserar respektive segment γ_i och beräknar motsvarande kurvintegral.

$$\gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 0\,dt \end{matrix}, \quad 0\le t\le 1$$

$$\gamma_2: \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \end{cases}, \quad \begin{matrix} dx = -dt \\ dy = dt \end{matrix}, \quad 0\le t\le 1$$

$$\gamma_3: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1-t \end{cases}, \quad \begin{matrix} dx = 0\,dt \\ dy = -dt \end{matrix}, \quad 0\le t\le 1$$

$$\oint_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} = \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 \underbrace{-(1-t)t + (1-t)t}_{=0}\,dt + \int_0^1 0\,dt$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

__Metod II__ (m h a Greens formel)

$$\oint_\gamma xy\,dx + xy\,dy = \iint_T \frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\,dx\,dy$$

$$= \iint_T (y-x)\,dx\,dy = \iint_T y\,dx\,dy - \iint_T x\,dx\,dy \underset{\text{symmetri}}{=} \underline{\underline{0}}$$

Pga

7.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ xy+yz=0 \end{cases} \qquad (*)$$

a) Att lösningsmängden till (*) innehåller en kurva på formen $\bar{r}(t)=(t,\ h(t),\ g(t))$ genom $(0,0,1)$.

$\Longleftrightarrow$ (*) definierar $y=y(x)$ och $z=z(x)$ sådana att $(x, y(x), z(x))$ löser (*) i en omgivning till $x=0$.

Ett tillräckligt villkor ges av IMPLICITA FUNKTIONSATSEN.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(0,0,1)} \neq 0, \quad \text{där } F=x^2+y^2+z^2,\ G=xy+yz.$$

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}_{\substack{(x,y,z)\\=(0,0,1)}} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ (x+z) & y \end{vmatrix}_{\substack{(x,y,z)\\=(0,0,1)}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Alltså $\exists$ $\bar{r}(t)=(t,\ h(t),\ g(t))$, $|t|<t_0$ som är del av lösningsmängden till (*).

b) Ekvationen $xy+yz=0 \Longleftrightarrow y(x+z)=0$

Nära punkten $(0,0,1)$ är $(x+z)\neq 0 \Rightarrow y=0$.

$y=0$ insatt i $x^2+y^2+z^2=1$ ger $z=\pm\sqrt{1-x^2}$, och eftersom $z(0)$ ska vara $=1$ välj positiva roten

<u>SVAR:</u> $\bar{r}(t)=(t,\ 0,\ \sqrt{1-t^2})$

8. Antag att $u(x,y)=f(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ och att u uppfyller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c^2u=0 \qquad (\text{Helmholtz ekv}).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(r)=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(r)=\frac{x}{r}f'(r)$$

och på samma sätt är

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(r)=\frac{y}{r}f'(r).$$

Detta ger

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(r)\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)f'(r)+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}f'(r)$$

$$=\frac{(x^2+y^2)-x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}f'(r)+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f''(r)\frac{\partial r}{\partial x}=\left\{\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$$

$$=\frac{y^2}{r^{5/2}}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r)$$

och på samma sätt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2}{r^{5/2}}f'(r)+\frac{y^2}{r^2}f''(r).$$

Om u uppfyller Helmholtz ekvation gäller alltså att

$$\left(\left(\frac{x^2}{r^{5/2}}\right)f'(r)+\frac{y^2}{r^2}f''(r)\right)+\left(\frac{y^2}{r^{5/2}}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r)\right)+c^2f(r)=0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x^2+y^2}{r^2}f''(r)+\frac{x^2+y^2}{r^{5/2}}f'(r)+c^2f(r)=0$$

$$\Longleftrightarrow f''(r)+1/r\, f'(r)+c^2f(r)=0 \qquad \text{V.S.B.}$$

9. a) Se läroboken sid 368

b) Se läroboken sid 370-371

c) Vi vill visa att

$$\iint_{\partial K} \bar{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\bar{F}\,dx\,dy\,dz$$

då $\bar{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), 0, 0)$, och $K: \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{matrix}$

K har sex kvadratiska sidor

X_1 där $x=1$ och $0 \le y, z \le 1$ med $\hat{N} = (1,0,0)$

X_0 där $x=0$ —— " —— $\hat{N} = (-1,0,0)$

Y_1 där $y=1$ och $0 \le x, z \le 1$ $\hat{N} = (0,1,0)$

Y_0 där $y=0$ —— " —— $\hat{N} = (0,-1,0)$

Z_1 där $z=1$ och $0 \le x, y \le 1$ $\hat{N} = (0,0,1)$

Z_0 där $z=0$ —— " —— $\hat{N} = (0,0,-1)$

Man ser att $\iint_{Y_1} \bar{F}\cdot N\,ds = \iint_{Y_1} (P,0,0)\cdot(0,1,0)\,ds = \iint_{Y_1} 0\,ds = 0$

och på samma sätt fås $\iint_{Y_0} \bar{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint_{Z_1} \bar{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint_{Z_0} \bar{F}\cdot\hat{N}\,dS = 0$

Alltså är

$$V.L. = \iint_{\partial K} \bar{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint_{X_1} + \iint_{X_0} + \iint_{Y_1} + \iint_{Y_0} + \iint_{Z_1} + \iint_{Z_0} =$$

$$= \iint_{X_1} \bar{F}\cdot\hat{N}\,dS + \iint_{X_0} \bar{F}\cdot\hat{N}\,dS =$$

9 forts.

$$= \iint_{\substack{0 \le y,z \le 1 \\ x=1}} (P,0,0)\cdot(1,0,0)\,dy\,dz$$

$$+ \iint_{\substack{0 \le y,z \le 1 \\ x=0}} (P,0,0)\cdot(-1,0,0)\,dy\,dz =$$

$$= \iint_{0 \le y,z \le 1} P(1,y,z)\,dy\,dz - \iint_{0 \le y,z \le 1} P(0,y,z)\,dy\,dz$$

$$= \iint_{0 \le y,z \le 1} P(1,y,z) - P(0,y,z)\,dy\,dz$$

H.L. $$\iiint_K \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz = \iint_{0 \le y,z \le 1} \left(\int_{x=0}^{1} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx \right) dy\,dz$$

$$= \iint_{0 \le y,z \le 1} \left[P(x,y,z) \right]_{x=0}^{x=1} dy\,dz$$

$$= \iint_{0 \le y,z \le 1} P(1,y,z) - P(0,y,z)\,dy\,dz = V.L.$$

V.S.B