KTH Teknikvetenskap

SF1624 ALGEBRA OCH GEOMETRI
SEMINARIEUPPGIFT 3
HT10

Se www.kth.se/social/course/SF1624 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

UPPGIFTER

Uppgift 1. I vart och ett av nedanstående exempel, visa att minst ett av axiomen för vektorrum inte är uppfyllt för strukturen V.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, och addition och multiplikation med skalär är definierade enligt

$$\begin{aligned}(u_1, u_2) + (v_1, v_2) &= (2(u_1 + v_1), 2(u_2 + v_2)), \\ k(u_1, u_2) &= (ku_1, ku_2).\end{aligned}$$

(b) V är mängden av alla vektorer (x, y) sådana att både x och y är heltal, och addition och multiplikation med skalär är definierade på sedvanligt vis.

(c) V är mängden av alla singulära 2×2-matriser, och addition och multiplikation med skalär är definierade på sedvanligt vis.

Uppgift 2. Bestäm alla möjliga värden på konstanterna a och b sådana att vektorn $(1, 2, b, 0)$ ligger i det delrum av $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $(1, -1, 2, 0)$, $(2, 1, -1, a)$ och $(0, 0, 1, -2)$.

Uppgift 3. Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum V.

(a) Är de tre vektorerna $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + 4\mathbf{w}$ och $\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + 9\mathbf{w}$ linjärt oberoende?

(b) Låt a, b, c och d vara reella tal sådana att $ad - bc \neq 0$. Visa att $a\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ och $b\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ är linjärt oberoende.

Uppgift 4. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Visa att matriserna A^2, B^2, AB och BA utgör en bas för vektorrummet M_{22} av 2×2-matriser.

(b) Uttryck matriserna B och $(A + B)^2$ i basen $\{A^2, B^2, AB, BA\}$.

Uppgift 5. Betrakta följande vektorer i $\mathbf{R}^3$:

$$v_1 = (1, 2, -1), \quad v_2 = (2, 0, 4), \quad v_3 = (1, 6, -7), \quad v_4 = (2, 4, -2)$$

(a) Hitta en bas för $V := \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ och beräkna dim(V).

(b) Bevisa att

$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = 0\}$$

är ett delrum till $\mathbf{R}^4$, och beräkna dim(W).

Uppgift 6. I ett vektorrum med basvektorer $\{e_1, e_2\}$ väljs vektorerna med koordinaterna $f_1 = (4, 3)$ respektive $f_2 = (3, 2)$ som nya basvektorer $f = \{f_1, f_2\}$.

(a) Vilka är koordinaterna i det nya systemet för den vektor som i det gamla systemet har koordinaterna $(2, 1)$?

(b) Vilka är koordinaterna i det gamla systemet för den vektor som i det nya systemet har koordinaterna $(1, -1)$?

(c) Vilken är ekvationen i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $x - y = 2$?

Uppgift 7. Låt A vara en 5×7-matris som kan transformeras genom elementära radoperationer till följande matris:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Är det möjligt att hitta en bas för radrummet till A? Om det är möjligt, hitta en sådan bas.

(b) Är det möjligt att beräkna dimensionen av radrummet till A? Om det är möjligt, beräkna den.

(c) Är det möjligt att hitta en bas för nollrummet till A? Om det är möjligt, hitta en sådan bas.

(d) Är det möjligt att beräkna dimensionen av nollrummet till A? Om det är möjligt, beräkna den.

(e) Är det möjligt att hitta en bas för kolonnrummet till A? Om det är möjligt, hitta en sådan bas.

(f) Är det möjligt att beräkna dimensionen av kolonnrummet till A? Om det är möjligt, beräkna den.

REKOMMENDERADE UPPGIFTER

Utöver ovanstående seminarieuppgifter rekommenderas följande uppgifter från kursboken till självstudier och övningar:

Kapitel 4 — Allmänna vektorrum		
4.1	Reella vektorrum	3, 5, 7
4.2	Delrum	1, 5, 11, 15
4.3	Linjärt oberoende	3, 5, 9, 11
4.4	Koordinater och baser	3, 5, 11
4.5	Dimension	7, 9, 15, 21
4.6	Basbyte	3, 5b, 7, 9
4.7	Radrum, kolonnrum och nollrum	3, 5, 7, 11, 17
4.8	Rang, nollrumsdimension och de fundamentala matrisrummen	1, 5, 11, 13