KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Onsdagen den 16 mars, 2011

Skrivtid: 14.00-19.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. På de tre första uppgifterna, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen från period 2, 2010 och period 3, 2011. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

(1) (a) Använd Gauss-Jordanelimination för att beräkna inversen av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3)

(b) Använd resultatet från (a) för att lösa matrisekvationen $XA = B$, där

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1)

(2) Låt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representera en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ med avseende på standardbasen.

(a) Beräkna $T(1, 2, -2)$. **(1)**

(b) Bestäm *kärnan*[1] till T, dvs nollrummet till matrisen A. **(2)**

(c) Visa att $T(1, 0, 0), T(0, 1, 0)$ och $T(0, 0, 1)$ är linjärt beroende. **(1)**

(3) Låt T vara den linjära avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som ges av standardmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm standardmatrisen för sammansättningen $T \circ T$. **(1)**

(b) Bestäm en bas för $\mathbb{R}^2$ som består av egenvektorer till A. **(3)**

[1] eng. *kernel*

DEL B

(4) Om vi har en triangel med sidlängderna a, b och c kan vi beräkna arean som $\frac{1}{4}\sqrt{-\det(A)}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Använd denna formel för att beräkna arean av en triangel med sidlängderna $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ och $2\sqrt{2}$. **(4)**

(5) Studera $\mathbb{R}^4$ med den vanliga euklidiska inre produkten $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Låt W vara det delrum till $\mathbb{R}^4$ som ges av lösningsmängden till ekvationen

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0.$$

(a) Bestäm en bas för W. **(1)**

(b) Använd Gram-Schmidts metod för att utgående från basen i (a) hitta en ortonormal bas för W. **(3)**

(6) (a) Redogör för hur vi kan bestämma den punkt Q i ett givet plan med ekvation på formen $ax + by + cz = d$ som ligger närmast en given punkt P i rummet.
Illustrera metoden genom att för var och en av de tre punkterna $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (1, 1, 1)$ och $P_3 = (2, -1, -1)$ bestämma motsvarande närmsta punkt i planet med ekvationen $x - 2y + 2z = 1$. **(3)**

(b) Använd räkningarna ovan för att avgöra vilka (om någon) av punkterna P_1, P_2 och P_3 som ligger på samma sida av planet som origo. **(1)**

Var god vänd!

DEL C

(7) Låt A vara en symmetrisk 3×3-matris som har ett egenvärde som är lika med 2. Anta att alla vektorer som uppfyller $x - 2y + z = 0$ är egenvektorer till A med egenvärdet 1.

(a) Bestäm en egenvektor med egenvärde 2. **(1)**

(b) Bestäm matrisen A. (*Ledning*: Börja med att bestämma en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer till A.) **(3)**

(8) På campus finns det två studentpubar A och B. Varje fredag fördelar sig studenterna efter följande mönster, som enbart beror på pubvalet förra helg. Av de studenter som var på pub A kommer 60% välja pub A igen, medan de resterande 40% väljer pub B. Av dem som var på pub B förra helgen kommer enbart 20% välja pub B, medan 80% väljer pub A. Vid terminstart väljer 50% av studenterna pub A och 50% av studenterna väljer pub B.

(a) Låt a_n vara andelen studenter som väljer pub A fredag n och b_n vara andelen studenter som väljer pub B fredag n. Visa att vi då har sambandet

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}60 & 0{,}80 \\ 0{,}40 & 0{,}20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

för $n \geq 0$ om vi numrerar fredagarna $0, 1, 2 \ldots$. **(1)**

(b) Vad blir fördelningen av studenterna på de olika pubarna vid slutet av studietiden (d.v.s. efter en mycket lång tid)? **(3)**

(9) För alla vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^3$ gäller att

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0.$$

Bevisa detta genom att

(a) Visa att vänsterledet, $T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, är linjärt i $\mathbf{u}$ när $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ fixerade. **(1)**

(b) Visa att vänsterledet är noll om $\mathbf{u}$ är en linjärkombination av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. **(1)**

(c) Visa att vänsterledet är noll om $\mathbf{u}$ är ortogonal mot både $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. **(1)**

(d) Förklara varför man från (a)-(c) kan dra slutsatsen att påståendet gäller för alla vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^3$. **(1)**