



KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningförslag till tentamen 2011-03-16

DEL A

(1) (a) Använd Gauss-Jordanelimination för att beräkna inversen av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3)

(b) Använd resultatet från (a) för att lösa matrisekvationen $XA = B$, där

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1)

Lösning. (a) Vi kan beräkna inversen A^{-1} genom Gauss-Jordanelimination på totalmatrisen $[A \mid I]$ vilket ger

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -r_2 & & & & & \\ r_1 & & & & & \\ r_3 + r_2 & & & & & \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} r_1 + 3r_2 & & & & & \\ r_2 & & & & & \\ r_3 - 2r_2 & & & & & \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} r_1 + 2r_3 & & & & & \\ r_2 + r_3 & & & & & \\ -r_3 & & & & & \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Alltså har vi fått att

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) För att lösa matrisekvationen $XA = B$ multiplicerar vi bägge sidor med A^{-1} från höger och får $X = BA^{-1}$. Med hjälp av resultatet från (a) kan vi nu beräkna

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0-1+4 & 0+1-2 & 0+1-2 \\ -5+3+2 & 5-3-1 & 10-3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi kan kontrollera räkningarna genom att se att

$$\begin{aligned} XA &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+1-1 & 3-3+1 & 3-1+0 \\ 0-1+6 & 0+3-6 & 0+1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} = B. \end{aligned}$$

□

Svar:

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$

(b) Lösningen är $X = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$

(2) Låt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representera en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ med avseende på standardbasen.

- (a) Beräkna $T(1, 2, -2)$. (1)
 (b) Bestäm kärnan¹ till T , dvs nollrummet till matrisen A . (2)
 (c) Visa att $T(1, 0, 0)$, $T(0, 1, 0)$ och $T(0, 0, 1)$ är linjärt beroende. (1)

Lösning. a). För att bestämma $T(1, 2, -2)$ måste vi utföra matrismultiplikationen $A \cdot [1 \ 2 \ -2]^T$, där A är (4×3) -matrisen ovan. Vi erhåller

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs

$$T(1, 2, -2) = (-1, -3, -1, 1).$$

Vi utför Gauss-Jordanelmination på matrisen A för att få fram nollrummet. Vi använder första raden för att eliminera i första kolumnen och får

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 - \frac{2}{3}r_2 \\ \frac{1}{3}r_2 \\ r_3 - r_2 \\ r_4 + 2r_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har därmed en fri variabel i den tredje kolumnen och inför en parameter så att $x_3 = 3t$. Vi kan sedan använda de två nollskilda raderna för att läsa av $x_1 = -\frac{1}{3}x_3 = -t$ och $x_2 = -\frac{4}{3}x_3 = -4t$. Därmed består nollrummet av alla punkter (x_1, x_2, x_3) i \mathbf{R}^3 på formen $(-t, -4t, 3t)$ där t är en reell parameter.

Vi kan använda satsen från boken som säger att dimensionen av bildrummet till en avbildning T plus dimensionen av kärnan till T är lika med antalet kolonner i matrisen A . Bildrummet ges spänns upp av vektorerna $T(1, 0, 0)$, $T(0, 1, 0)$ och $T(0, 0, 1)$. Om dessa vore linjärt *oberoende* skulle bildrummet ha dimension tre, vilket medför att dimensionen till kärnan är noll, men vi såg i del (b) att kärnan har dimension ett eftersom det krävdes en parameter.

Ett annat sätt är att se att

$$aT(1, 0, 0) + bT(0, 1, 0) + cT(0, 0, 1) = T(a, b, c)$$

och därmed är de tre vektorerna linjärt beroende precis om det finns a , b och c som inte alla är noll och $T(a, b, c) = 0$. Detta var vad vi såg att det fanns i uppgift (b), tex är

¹eng. *kernel*

$T(-1, -4, 3) = 0$ och därmed har vi det linjära beroendet

$$-T(1, 0, 0) - 4T(0, 1, 0) + 3T(0, 0, 1) = 0.$$

□

Svar:

(a) $T(1, 2, -2) = (-1, -3, -1, 1)$.

(b) Kärnan ges av alla vektorer på formen $(x_1, x_2, x_3) = (-t, -4t, t)$, där t är en reell parameter.

(3) Låt T vara den linjära avbildning från \mathbb{R}^2 till \mathbb{R}^2 som ges av standardmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm standardmatrisen för sammansättningen $T \circ T$. (1)

(b) Bestäm en bas för \mathbb{R}^2 som består av egenvektorer till A . (3)

Lösning. (a) Standardmatrisen för sammansättningen är lika med matrisprodukten av standardmatriserna. Vi får alltså att standardmatrisen för $T \circ T$ ges av

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Eftersom matrisen A är övertriangulär kan vi läsa av egenvärdena som diagonalelementen, $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$. Vi hittar sedan egenvektorer till motsvarande egenvärden genom att lösa ekvationssystemet med totalmatris $[A - \lambda I \mid 0]$. För $\lambda = 1$ får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4}r_1 \\ r_2 + \frac{1}{2}r_1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

och vi kan läsa av lösningarna som $(t, 0)$ för en reell parameter t .

För $\lambda = -1$ får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{2}r_1 \\ r_2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

och vi kan läsa av lösningarna som $(2t, t)$ för en reell parameter t .

En bas av egenvektorer ges nu av en egenvektor för varje egenvärde eftersom vi bara behöver två basvektorer i \mathbb{R}^2 . Alltså kan vi välja $(1, 0)$ med egenvärde 1 och $(2, 1)$ med egenvärde -1 .

□

Svar:

(a) Standardmatrisen för $T \circ T$ är identitetmatrisen.

(b) $(1, 0)$ och $(2, 1)$ utgör tillsammans en bas för \mathbb{R}^2 av egenvektorer till A .

DEL B

- (4) Om vi har en triangel med sidlängderna a , b och c kan vi beräkna arean som $\frac{1}{4}\sqrt{-\det(A)}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Använd denna formel för att beräkna arean av en triangel med sidlängderna $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ och $2\sqrt{2}$. (4)

Lösning. När vi sätter in värdena $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ och $c = 2\sqrt{2}$ i matrisen A får vi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

och vi kan beräkna $\det(A)$ med hjälp av radoperationer som

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} r_2 \\ r_1 \\ r_3 - r_1 - 2r_2 \\ r_4 - r_2 - 3r_3 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 + \frac{3}{4}r_2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{4} \end{vmatrix} = -(4) \cdot \left(-\frac{15}{4}\right) = -15. \end{aligned}$$

Alltså ges arean av triangeln enligt formeln av $\frac{1}{4}\sqrt{15}$. □

Svar: Arean av triangeln är enligt formeln $\frac{1}{4}\sqrt{15}$ areaenheter.

- (5) Studera \mathbb{R}^4 med den vanliga euklidiska inre produkten $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Låt W vara det delrum till \mathbb{R}^4 som ges av lösningsmängden till ekvationen

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0.$$

- (a) Bestäm en bas för W . (1)
 (b) Använd Gram-Schmidts metod för att utgående från basen i (a) hitta en ortonormal bas för W . (3)

Lösning. (a) Vi bestämmer först en bas för W . Skriv lösningsmängden till ekvationen $x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$ på parameterform genom att sätta $x_2 = r$, $x_3 = s$ och $x_4 = t$. Vi får att

$$\begin{cases} x_1 = r - 2s + 3t \\ x_2 = r \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

Detta kan skrivas

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = r(1, 1, 0, 0) + s(-2, 0, 1, 0) + t(3, 0, 0, 1).$$

En bas för W utgörs alltså av vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-2, 0, 1, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (3, 0, 0, 1)$.

- (b) Vi använder nu Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocedur för att få en ortogonal bas.
 Steg 1:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0).$$

Steg 2:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 = (-2, 0, 1, 0) - \frac{-2}{2}(1, 1, 0, 0) = (-1, 1, 1, 0).$$

Steg 3:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 \\ &= (3, 0, 0, 1) - \frac{3}{2}(1, 1, 0, 0) - \frac{-3}{3}(-1, 1, 1, 0) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \frac{1}{2}(1, -1, 2, 2). \end{aligned}$$

Vi erhåller en ortonormal bas genom att normera de erhållna vektorerna $(1, 1, 0, 0)$, $(1, -1, 1, 0)$ och $\frac{1}{2}(1, -1, 2, 2)$; basen blir

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -1, 2, 2) \right\}.$$

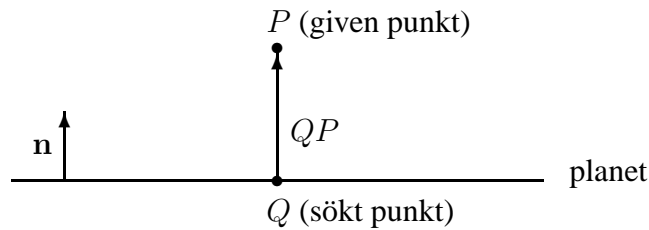
□

Svar:

- (a) En bas för W ges av vektorena $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-2, 0, 1, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (3, 0, 0, 1)$.
- (b) En ortonormal bas för W ges av vektorena $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1, 0)$ och $\mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -1, 2, 2)$.

- (6) (a) Redogör för hur vi kan bestämma den punkt Q i ett givet plan med ekvation på formen $ax + by + cz = d$ som ligger närmast en given punkt P i rummet. Illustrera metoden genom att för var och en av de tre punkterna $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (1, 1, 1)$ och $P_3 = (2, -1, -1)$ bestämma motsvarande närmsta punkt i planet med ekvationen $x - 2y + 2z = 1$. (3)
- (b) Använd räkningarna ovan för att avgöra vilka (om någon) av punkterna P_1 , P_2 och P_3 som ligger på samma sida av planet som origo. (1)

Lösning. (a) Den sökta punkten Q i planet karakteriseras av att vektorn QP är vinkelrät mot planet och därmed parallell med planets normalvektor $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

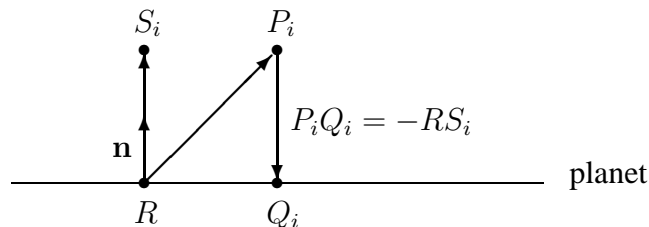


Det finns två naturliga, och besläktade, metoder att bestämma Q , och vi beskriver bägge.

(Som bekant ska man dock som tentand bara ge *en* lösning!)

Eftersom metoderna ska användas för flera olika givna punkter P_i ändrar vi beteckningarna något och antar att man ska bestämma den punkt Q_i i planet som ligger närmast den givna punkten $P_i = (x_i, y_i, z_i)$.

Metod 1, "projektion på normalvektorn \mathbf{n} ":



I denna metod bestäms först en punkt R i det givna planet, exempelvis genom att lösa ekvationen $ax + by + cz = d$ med Gauss-elimination och sätta de fria variablerna till 0. Det ger till resultat en punkt $R = (x_0, y_0, z_0)$, där alltså $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$. Nästa steg är att projicera vektorn

$$RP_i = (x_i - x_0, y_i - y_0, z_i - z_0)$$

på planets normalvektor \mathbf{n} , vilket ger till resultat en vektor

$$RS_i = \frac{RP_i \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = s_i \cdot (a, b, c),$$

där

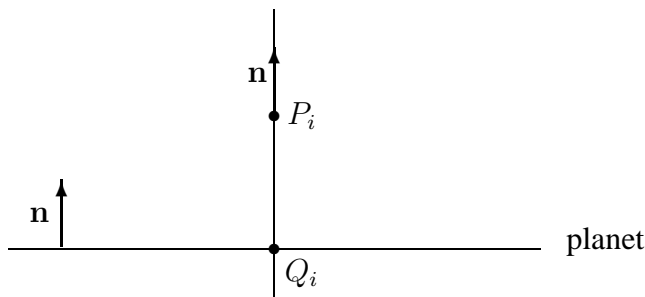
$$s_i = \frac{RP_i \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} = \frac{a(x_i - x_0) + b(y_i - y_0) + c(z_i - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Slutligen erhålls den sökta punkten Q_i ur sambandet (se figuren)

$$Q_i = P_i + P_i Q_i = P_i - RS_i = (x_i, y_i, z_i) - s_i \cdot (a, b, c),$$

med s_i enligt ovan.

Metod 2, "projektion direkt på planet mha normalvektorn \mathbf{n} ":



I denna metod bildar man först en linje som går genom den givna punkten $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ och som har riktningsvektorn $\mathbf{n} = (a, b, c)$, så att linjen är vinkelrät mot det givna planet. Ekvationen för denna linje på parameterform är

$$(x, y, z) = (x_i, y_i, z_i) + t \cdot (a, b, c).$$

Vår sökta punkt Q_i utgör skärningspunkten mellan linjen och det givna planet, och den erhålls genom att bestämma det värde t_i på parametern t för vilket $ax + by + cz = d$, dvs $(a, b, c) \cdot ((x_i, y_i, z_i) + t \cdot (a, b, c)) = d$, vilket ger att

$$t_i = \frac{d - (a, b, c) \cdot (x_i, y_i, z_i)}{(a, b, c) \cdot (a, b, c)} = \frac{d_i - ax_i - by_i - cz_i}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Därmed är vår sökta punkt $Q_i = (x_i, y_i, z_i) + t_i \cdot (a, b, c)$, med t_i enligt ovan.

Notera att metoderna ger samma resultat, ty $t_i = -s_i$ (eftersom $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$).

Insättning av siffror: Vi har i uppgiften att $(a, b, c) = (1, -2, 2)$, $d = 1$,

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 0), \\ P_2 &= (x_2, y_2, z_2) = (1, 1, 1), \\ P_3 &= (x_3, y_3, z_3) = (2, -1, -1) \end{aligned}$$

och, om man använder metod 1, $R = (x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$.

Insättning i exempelvis metod 2 ger att $t_i = (1 - x_i + 2y_i - 2z_i)/9$, och därmed är $t_1 = 2/9$, $t_2 = 0$ och $t_3 = -1/9$, så att

$$\begin{aligned} Q_1 &= (1, 1, 0) + (2/9) \cdot (1, -2, 2) = (11/9, 5/9, 4/9), \\ Q_2 &= (1, 1, 1) + 0 \cdot (1, -2, 2) = (1, 1, 1) = P_2, \\ Q_3 &= (2, -1, -1) - (1/9) \cdot (1, -2, 2) = (17/9, -7/9, -11/9). \end{aligned}$$

- (b) Om $s_i > 0$ (dvs $t_i < 0$) så ligger P_i på den sida av planet som normalvektorn \mathbf{n} pekar åt, om $s_i < 0$ (dvs $t_i > 0$) så ligger P_i på den motsatta sidan, och om $s_i = 0$ (dvs $t_i = 0$) så ligger P_i i planet.

Eftersom i vårt fall $t_1 > 0$, $t_2 = 0$ och $t_3 < 0$ så ligger punkterna P_1 och P_3 på varsin sida av planet medan P_2 ligger i planet (så att $Q_2 = P_2$).

Om man sätter $P_4 = (0, 0, 0)$ i formeln ovan så erhålls att $t_4 = 1/9 > 0$, och därmed är det endast P_1 av de tre givna punkterna som ligger på samma sida om planet som origo.

□

Svar:

- (a) De närmaste punkterna är $Q_1 = (11/9, 5/9, 4/9)$, $Q_2 = P_2 = (1, 1, 1)$ respektive $Q_3 = (17/9, -7/9, -11/9)$.
- (b) P_1 ligger på samma sida om planet som origo, men inte P_2 och P_3 .

DEL C

- (7) Låt A vara en symmetrisk 3×3 -matris som har ett egenvärde som är lika med 2. Anta att alla vektorer som uppfyller $x - 2y + z = 0$ är egenvektorer till A med egenvärdet 1.
- (a) Bestäm en egenvektor med egenvärde 2. **(1)**
- (b) Bestäm matrisen A . (*Ledning:* Börja med att bestämma en ortogonal bas för \mathbb{R}^3 som består av egenvektorer till A .) **(3)**

Lösning. (a) Eftersom egenvektorer som hör till olika egenvärden till symmetriska matriser är ortogonala mot varandra måste egenvektorerna med egenvärde 2 vara normalvektorer till planet av egenvektorer med egenvärde 1. Vi kan läsa av en normalvektor som koefficienterna i ekvationen för planet och får därmed egenvektorerna med egenvärde 2 som $t(1, -2, 1)$, där $t \neq 0$.

- (b) Vi kan nu finna en ortogonal bas av egenvektorer genom att välja två ortogonala vektorer i planet $x - 2y + z = 0$. Den ena kan väljas som $(1, 1, 1)$ och vi kan få den andra genom kryssprodukten med $(1, -2, 1)$, dvs $(1, 1, 1) \times (1, -2, 1) = (1 - (-2), -1 - (-1), -2 - 1) = (3, 0, -3)$.

Vi kan nu med ett ortogonalt basbyte med matrisen

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

diagonalisera A till

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså kan vi beräkna A genom

$$\begin{aligned} A &= P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En alternativ metod är att se att $A - I$ har ett tvådimensionellt egenrum med egenvärde 0, dvs ett tvådimensionellt nollrum, och ett endimensionellt egenrum med egenvärde

ett som ges av linjen med riktningsvektor $(1, -2, 1)$. Dessutom är dessa båda egenrum ortogonala mot varandra. Alltså har vi $A - I$ är standardmatrisen för den ortogonala projektionen på vektorn $\mathbf{u} = (1, -2, 1)$. Om vi tänker på \mathbf{u} som en kolonnmatris kan därför $A - I$ skrivas som

$$\frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}^T \mathbf{u} = \frac{1}{1^2 + (-2)^2 + 1} [1 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi får nu A som $I + (A - I)$, dvs

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

□

Svar:

- (a) $(1, -2, 1)$ är en egenvektor med egenvärde 2.
(b) Matrisen ges av

$$A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

- (8) På campus finns det två studentpubar A och B . Varje fredag fördelar sig studenterna efter följande mönster, som enbart beror på pubvalet förra helg. Av de studenter som var på pub A kommer 60% välja pub A igen, medan de resterande 40% väljer pub B . Av dem som var på pub B förra helgen kommer enbart 20% välja pub B , medan 80% väljer pub A . Vid terminstart väljer 50% av studenterna pub A och 50% av studenterna väljer pub B .
- (a) Låt a_n vara andelen studenter som väljer pub A fredag n och b_n vara andelen studenter som väljer pub B fredag n . Visa att vi då har sambandet

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,60 & 0,80 \\ 0,40 & 0,20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

för $n \geq 0$ om vi numrerar fredagarna $0, 1, 2, \dots$ (1)

- (b) Vad blir fördelningen av studenterna på de olika pubarna vid slutet av studietiden (d.v.s. efter en mycket lång tid)? (3)

Lösning. (a) Enligt texten har vi att $a_{n+1} = 0,60a_n + 0,80b_n$ och $b_{n+1} = 0,40a_n + 0,20b_n$, vilket kan formuleras som matrisprodukten

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,60 & 0,80 \\ 0,40 & 0,20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}.$$

- (b) För varje $n \geq 0$ har vi att fördelning $F_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$ ges av $F_{n+1} = AF_n$, där matrisen

$$A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Speciellt har vi att

$$F_{n+1} = AF_n = A(AF_{n-1}) = \dots = A^{n+1}F_0.$$

Vi känner $F_0 = \begin{bmatrix} 0,50 \\ 0,50 \end{bmatrix}$, och vill beräkna $A^n F_0$, för stora n . Detta gör vi lättast med egenvektorer. Det karakteristiska polynomet till matrisen A är

$$\left(\lambda - \frac{6}{10}\right)\left(\lambda - \frac{2}{10}\right) - \frac{32}{100} = \lambda^2 - \frac{8}{10}\lambda - \frac{20}{100}.$$

Nollställen hittar vi genom kvadratkomplettering. Det vill säga vi sätter uttrycket ovan lika med noll, och erhåller att

$$\left(\lambda - \frac{4}{10}\right)^2 = \frac{20}{100} + \frac{16}{100} = \frac{36}{100}.$$

Detta betyder att egenvärdena till matrisen A är

$$\lambda_1 = \frac{6}{10} + \frac{4}{10} = 1 \quad \text{och} \quad \lambda_2 = \frac{-6}{10} + \frac{4}{10} = -\frac{2}{10}.$$

De tillhörande egenrummen bestämmer vi på sedvanligt sätt, och får att E_1 är nollrummet till

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-8}{10} \\ \frac{-4}{10} & \frac{8}{10} \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är $E_1 = (2t, t)$, godtyckliga tal t . Egenrummet E_2 blir nollrummet till $\begin{bmatrix} \frac{-8}{10} & \frac{-8}{10} \\ \frac{-4}{10} & \frac{-4}{10} \end{bmatrix}$, vilket betyder att $E_2 = (t, -t)$. En bas för egenrummet väljer vi som $\beta = \{(2, 1), (1, -1)\}$. Vi har att $A = P^{-1}DP$, där P är basbytesmatrisen från standardmatrisen till basen β , och där

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Matrisen P^{-1} är basbytesmatrisen från basen β till standardbasen, och denna läser vi av som

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

En välkänd formel ger att

$$P = (P^{-1})^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

För varje $n \geq 0$ har vi att $A^n = P^{-1}D^nP$. Vi beräknar

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{5})^n \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & (-\frac{1}{5})^n \\ 1 & -(-\frac{1}{5})^n \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + (-\frac{1}{5})^n & 2 - 2(-\frac{1}{5})^n \\ 1 - (-\frac{1}{5})^n & 1 + 2(-\frac{1}{5})^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi har att $F_0 = \begin{bmatrix} 0,50 \\ 0,50 \end{bmatrix}$. Detta betyder att för varje $n > 0$ har vi att

$$F_n = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + (-\frac{1}{5})^n & 2 - 2(-\frac{1}{5})^n \\ 1 - (-\frac{1}{5})^n & 1 + 2(-\frac{1}{5})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,50 \\ 0,50 \end{bmatrix}.$$

Speciellt har vi att om $n \gg 0$ blir stor, eventuellt går mot oändligheten, så kommer $(\frac{1}{5})^n$ gå mot 0. Detta ger att

$$F_\infty = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \cdot 0,50 + 0 + 2 \cdot 0,50 - 0 \\ 0,50 - 0 + 0,50 + 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs fördelningen av studenter blir $2/3 \approx 67\%$ på pub A och $1/3 \approx 33\%$ på pub B . \square

Svar:

- (b) Fördelningen i slutet av studieten är $2/3$ av studenterna på pub A och $1/3$ av studenterna på pub B .

(9) För alla vektorer \mathbf{u} , \mathbf{v} och \mathbf{w} i \mathbb{R}^3 gäller att

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Bevisa detta genom att

- (a) Visa att vänsterledet, $T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, är linjärt i \mathbf{u} när \mathbf{v} och \mathbf{w} fixerade. **(1)**
 (b) Visa att vänsterledet är noll om \mathbf{u} är en linjärkombination av \mathbf{v} och \mathbf{w} . **(1)**
 (c) Visa att vänsterledet är noll om \mathbf{u} är ortogonal mot både \mathbf{v} och \mathbf{w} . **(1)**
 (d) Förklara varför man från (a)-(c) kan dra slutsatsen att påståendet gäller för alla vektorer \mathbf{u} , \mathbf{v} och \mathbf{w} i \mathbb{R}^3 . **(1)**

Lösning. (a) Genom att använda distributiva lagen för kryssprodukten får vi

$$\begin{aligned} & T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)) + \mathbf{w} \times ((\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times \mathbf{v}) = \\ &= \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}_1) \\ &+ \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}_2) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}) = \\ &= \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}_1) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}) \\ &+ \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}_2) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}) \\ &= T(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + T(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

och vidare har vi

$$\begin{aligned} & T(a\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= (a\mathbf{u}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times (a\mathbf{u})) + \mathbf{w} \times ((a\mathbf{u}) \times \mathbf{v}) \\ &= a\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times a(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times a(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ &= a\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + a\mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + a\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ &= aT(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

(b) På grund av linjäriteten räcker det att visa påståendet för $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Vi får

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) - \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

och på samma sätt

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{0}) - \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

(c) På grund av linjäriteten från del (a) räcker det att visa påståendet för en enhetsvektor som är ortogonal mot både \mathbf{v} och \mathbf{w} . Om vi ser på vektorer i planet som är ortogonalt mot \mathbf{u} innebär nu kryssprodukten med \mathbf{u} från vänster en rotation med $\pi/2$ åt ena hållet, och kryssprodukt med \mathbf{u} från höger en rotation med $\pi/2$ åt andra hållet. (Om det är medurs eller moturs beror på från vilket håll vi ser på planet.)

Den första termen $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ är noll eftersom \mathbf{u} är parallell med $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. De båda andra termerna är multipler av \mathbf{u} . För att se att dessa tar ut varandra ser vi på vinkeln mellan \mathbf{v} och $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$ och vinkeln mellan \mathbf{w} och $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Dessa är lika eftersom vi i det första fallet roterat \mathbf{w} med $\pi/2$ åt ena hållet, och i det andra fallet roterat \mathbf{v} åt andra hållet lika mycket. Det rör sig därmed om två kryssprodukter av vektorer

med längderna $|\mathbf{v}|$ och $|\mathbf{w}|$ och med samma vinkel mellan. Det enda som skiljer är ordningen mellan faktorerna och därmed kommer de att ta ut varandra.

- (d) Vi kan skriva varje vektor \mathbf{u} som summan av en vektor \mathbf{u}_1 som ligger i spannet av \mathbf{v} och \mathbf{w} med en vektor \mathbf{u}_2 som är ortogonal mot både \mathbf{v} och \mathbf{w} . På grund av linjäriteten från (a) har vi därmed att

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = T(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + T(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 + 0 = 0,$$

där vi utnyttjar resultaten från (b) och (c) för att se att de båda termerna är noll.

□
