KTH Teknikvetenskap

# SF1624 Algebra och geometri
# Lösningsförslag till tentamen 2011-03-16

---

## DEL A

(1) (a) Använd Gauss-Jordanelimination för att beräkna inversen av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**(3)**

(b) Använd resultatet från (a) för att lösa matrisekvationen $XA = B$, där

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

**(1)**

*Lösning.* (a) Vi kan beräkna inversen $A^{-1}$ genom Gauss-Jordanelimination på totalmatrisen $\left[\, A \mid I \,\right]$ vilket ger

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} -r_2 \\ r_1 \\ r_3 + r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + 3r_2 \\ r_2 \\ r_3 - 2r_2 \end{bmatrix}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + 2r_3 \\ r_2 + r_3 \\ -r_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Alltså har vi fått att

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) För att lösa matrisekvationen $XA = B$ multiplicerar vi bägge sidor med $A^{-1}$ från höger och får $X = BA^{-1}$. Med hjälp av resultatet från (a) kan vi nu beräkna

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0-1+4 & 0+1-2 & 0+1-2 \\ -5+3+2 & 5-3-1 & 10-3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi kan kontrollera räkningarna genom att se att

$$\begin{aligned} XA &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+1-1 & 3-3+1 & 3-1+0 \\ 0-1+6 & 0+3-6 & 0+1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} = B. \end{aligned}$$

□

**Svar:**

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Lösningen är $X = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

(2) Låt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representera en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ med avseende på standardbasen.

(a) Beräkna $T(1, 2, -2)$. **(1)**

(b) Bestäm *kärnan*[1] till $T$, dvs nollrummet till matrisen $A$. **(2)**

(c) Visa att $T(1, 0, 0), T(0, 1, 0)$ och $T(0, 0, 1)$ är linjärt beroende. **(1)**

*Lösning.* a). För att bestämma $T(1, 2, -2)$ måste vi utföra matrismultiplikationen $A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$, där $A$ är $(4 \times 3)$-matrisen ovan. Vi erhåller

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs

$$T(1, 2, -2) = (-1, -3, -1, 1).$$

Vi utför Gauss-Jordanelmininination på matrisen $A$ för att få fram nollrummet. Vi använder första raden för att eliminera i första kolonnen och får

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 - \frac{2}{3} r_2 \\ \frac{1}{3} r_2 \\ r_3 - r_2 \\ r_4 + 2r_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har därmed en fri variabel i den tredje kolonnen och inför en parameter så att $x_3 = 3t$. Vi kan sedan använda de två nollskilda raderna för att läsa av $x_1 = -\frac{1}{3} x_3 = -t$ och $x_2 = -\frac{4}{3} x_3 = -4t$. Därmed består nollrummet av alla punkter $(x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbf{R}^3$ på formen $(-t, -4t, 3t)$ där $t$ är en reell parameter.

Vi kan använda satsen från boken som säger att dimensionen av bildrummet till en avbildning $T$ plus dimensionen av kärnan till $T$ är lika med antalet kolonner i matrisen $A$. Bildrummet ges spänns upp av vektorerna $T(1, 0, 0), T(0, 1, 0)$ och $T(0, 0, 1)$. Om dessa vore linjärt *oberoende* skulle bildrummet ha dimension tre, vilket medför att dimensionen till kärnan är noll, men vi såg i del (b) att kärnan har dimension ett eftersom det krävdes en parameter.

Ett annat sätt är att se att

$$aT(1, 0, 0) + bT(0, 1, 0) + cT(0, 0, 1) = T(a, b, c)$$

och därmed är de tre vektorerna linjärt beroende precis om det finns $a$, $b$ och $c$ som inte alla är noll och $T(a, b, c) = 0$. Detta var vad vi såg att det fanns i uppgift (b), tex är

[1] eng. *kernel*

$T(-1,-4,3)=0$ och därmed har vi det linjära beroendet

$$-T(1,0,0)-4T(0,1,0)+3T(0,0,1)=0.$$

$\square$

**Svar:**

(a) $T(1,2,-2)=(-1,-3,-1,1)$.

(b) Kärnan ges av alla vektorer på formen $(x_1,x_2,x_3)=(-t,-4t,t)$, där $t$ är en reell parameter.

(3) Låt $T$ vara den linjära avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som ges av standardmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm standardmatrisen för sammansättningen $T \circ T$. **(1)**

(b) Bestäm en bas för $\mathbb{R}^2$ som består av egenvektorer till $A$. **(3)**

*Lösning.* (a) Standardmatrisen för sammansättningen är lika med matrisprodukten av standardmatriserna. Vi får alltså att standardmatrisen för $T \circ T$ ges av

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Eftersom matrisen $A$ är övertriangulär kan vi läsa av egenvärdena som diagonalelementen, $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$. Vi hittar sedan egenvektorer till motsvarande egenvärden genom att lösa ekvationssystemet med totalmatris $\left[\begin{array}{c|c} A - \lambda I & 0 \end{array}\right]$. För $\lambda = 1$ får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{4} r_1 \\ r_2 + \frac{1}{2} r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

och vi kan läsa av lösningarna som $(t, 0)$ för en reell parameter $t$.

För $\lambda = -1$ får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{2} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

och vi kan läsa av lösningarna som $(-2t, t)$ för en reell parameter $t$.

En bas av egenvektorer ges nu av en egenvektor för varje egenvärde eftersom vi bara behöver två basvektorer i $\mathbb{R}^2$. Alltså kan vi välja $(1, 0)$ med egenvärde $1$ och $(-2, 1)$ med egenvärde $-1$.

$\square$

**Svar:**

(a) Standardmatrisen för $T \circ T$ är identitetmatrisen.

(b) $(1, 0)$ och $(-2, 1)$ utgör tillsammans en bas för $\mathbb{R}^2$ av egenvektorer till $A$.

## DEL B

(4) Om vi har en triangel med sidlängderna $a$, $b$ och $c$ kan vi beräkna arean som $\frac{1}{4}\sqrt{-\det(A)}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Använd denna formel för att beräkna arean av en triangel med sidlängderna $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ och $2\sqrt{2}$. **(4)**

*Lösning.* När vi sätter in värdena $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ och $c = 2\sqrt{2}$ i matrisen $A$ får vi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

och vi kan beräkna $\det(A)$ med hjälp av radoperationer som

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} r_2 \\ r_1 \\ r_3 - r_1 - 2r_2 \\ r_4 - r_2 - 3r_3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 + \frac{3}{4}r_2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{4} \end{vmatrix} = -(4) \cdot \left(-\frac{15}{4}\right) = -15.$$

Alltså ges arean av triangeln enligt formeln av $\frac{1}{4}\sqrt{15}$. □

**Svar:** Arean av triangeln är enligt formeln $\frac{1}{4}\sqrt{15}$ areaenheter.

(5) Studera $\mathbb{R}^4$ med den vanliga euklidiska inre produkten $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Låt $W$ vara det delrum till $\mathbb{R}^4$ som ges av lösningsmängden till ekvationen

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0.$$

(a) Bestäm en bas för $W$. **(1)**

(b) Använd Gram-Schmidts metod för att utgående från basen i (a) hitta en ortonormal bas för $W$. **(3)**

*Lösning.* (a) Vi bestämmer först en bas för $W$. Skriv lösningsmängden till ekvationen $x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$ på parameterform genom att sätta $x_2 = r$, $x_3 = s$ och $x_4 = t$. Vi får att

$$\begin{cases} x_1 &= r - 2s + 3t \\ x_2 &= r \\ x_3 &= s \\ x_4 &= t \end{cases}$$

Detta kan skrivas

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = r(1,1,0,0) + s(-2,0,1,0) + t(3,0,0,1).$$

En bas för $W$ utgörs alltså av vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (-2,0,1,0)$ och $\mathbf{u}_3 = (3,0,0,1)$.

(b) Vi använder nu Gram-Schmidts ortogonaliseringprocedur för att få en ortogonal bas. Steg 1:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1,1,0,0).$$

Steg 2:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = (-2,0,1,0) - \frac{-2}{2}(1,1,0,0) = (-1,1,1,0).$$

Steg 3:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 \\ &= (3,0,0,1) - \frac{3}{2}(1,1,0,0) - \frac{-3}{3}(-1,1,1,0) \\ &= (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1) = \frac{1}{2}(1,-1,2,2). \end{aligned}$$

Vi erhåller en ortonormal bas genom att normera de erhållna vektorerna $(1,1,0,0)$, $(1,-1,1,0)$ och $\frac{1}{2}(1,-1,2,2)$; basen blir

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,-1,2,2) \right\}.$$

□

**Svar:**

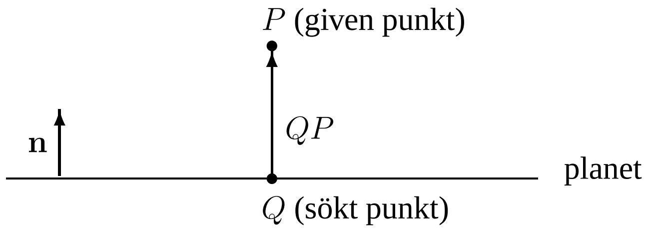
(a) En bas för $W$ ges av vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (-2,0,1,0)$ och $\mathbf{u}_3 = (3,0,0,1)$.

(b) En ortonormal bas för $W$ ges av vektorerna $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$, $\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1,0)$ och $\mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,-1,2,2)$.

(6) (a) Redogör för hur vi kan bestämma den punkt $Q$ i ett givet plan med ekvation på formen $ax + by + cz = d$ som ligger närmast en given punkt $P$ i rummet.
Illustrera metoden genom att för var och en av de tre punkterna $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (1, 1, 1)$ och $P_3 = (2, -1, -1)$ bestämma motsvarande närmsta punkt i planet med ekvationen $x - 2y + 2z = 1$. **(3)**

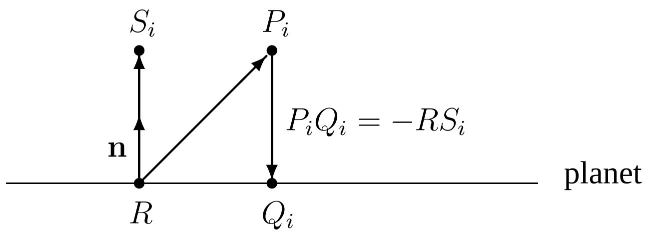
(b) Använd räkningarna ovan för att avgöra vilka (om någon) av punkterna $P_1$, $P_2$ och $P_3$ som ligger på samma sida av planet som origo. **(1)**

*Lösning.* (a) Den sökta punkten $Q$ i planet karakteriseras av att vektorn $QP$ är vinkelrät mot planet och därmed parallell med planets normalvektor $\mathbf{n} = (a, b, c)$.




Det finns två naturliga, och besläktade, metoder att bestämma $Q$, och vi beskriver bägge.
(Som bekant ska man dock som tentand bara ge *en* lösning!)
Eftersom metoderna ska användas för flera olika givna punkter $P_i$ ändrar vi beteckningarna något och antar att man ska bestämma den punkt $Q_i$ i planet som ligger närmast den givna punkten $P_i = (x_i, y_i, z_i)$.

**Metod 1, "projektion på normalvektorn n":**




I denna metod bestäms först en punkt $R$ i det givna planet, exempelvis genom att lösa ekvationen $ax + by + cz = d$ med Gauss-elimination och sätta de fria variablerna till 0. Det ger till resultat en punkt $R = (x_0, y_0, z_0)$, där alltså $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$.
Nästa steg är att projicera vektorn

$$RP_i = (x_i - x_0,\ y_i - y_0,\ z_i - z_0)$$

på planets normalvektor $\mathbf{n}$, vilket ger till resultat en vektor

$$RS_i = \frac{RP_i \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = s_i \cdot (a, b, c),$$

där

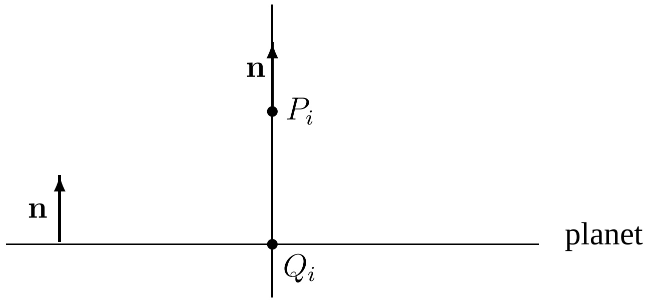
$$s_i = \frac{RP_i \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} = \frac{a(x_i - x_0) + b(y_i - y_0) + c(z_i - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Slutligen erhålls den sökta punkten $Q_i$ ur sambandet (se figuren)

$$Q_i = P_i + P_iQ_i = P_i - RS_i = (x_i, y_i, z_i) - s_i \cdot (a, b, c),$$

med $s_i$ enligt ovan.

**Metod 2, "projektion direkt på planet mha normalvektorn $\mathbf{n}$":**




I denna metod bildar man först en linje som går genom den givna punkten $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ och som har riktningsvektorn $\mathbf{n} = (a, b, c)$, så att linjen är vinkelrät mot det givna planet. Ekvationen för denna linje på parameterform är

$$(x, y, z) = (x_i, y_i, z_i) + t \cdot (a, b, c).$$

Vår sökta punkt $Q_i$ utgör skärningspunkten mellan linjen och det givna planet, och den erhålls genom att bestämma det värde $t_i$ på parametern $t$ för vilket $ax + by + cz = d$, dvs $(a, b, c) \cdot ((x_i, y_i, z_i) + t \cdot (a, b, c)) = d$, vilket ger att

$$t_i = \frac{d - (a, b, c) \cdot (x_i, y_i, z_i)}{(a, b, c) \cdot (a, b, c)} = \frac{d_i - ax_i - by_i - cz_i}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Därmed är vår sökta punkt $Q_i = (x_i, y_i, z_i) + t_i \cdot (a, b, c)$, med $t_i$ enligt ovan.
Notera att metoderna ger samma resultat, ty $t_i = -s_i$ (eftersom $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$).
**Insättning av siffror:** Vi har i uppgiften att $(a, b, c) = (1, -2, 2)$, $d = 1$,

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1, y_1, z_1) &&= (1, 1, 0), \\ P_2 &= (x_2, y_2, z_2) &&= (1, 1, 1), \\ P_3 &= (x_3, y_3, z_3) &&= (2, -1, -1) \end{aligned}$$

och, om man använder metod 1, $R = (x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$.
Insättning i exempelvis metod 2 ger att $t_i = (1 - x_i + 2y_i - 2z_i)/9$,
och därmed är $t_1 = 2/9$, $t_2 = 0$ och $t_3 = -1/9$, så att

$$\begin{aligned} Q_1 &= (1, 1, 0) + (2/9) \cdot (1, -2, 2) &&= (11/9,\ 5/9,\ 4/9), \\ Q_2 &= (1, 1, 1) + 0 \cdot (1, -2, 2) &&= (1, 1, 1) = P_2, \\ Q_3 &= (2, -1, -1) - (1/9) \cdot (1, -2, 2) &&= (17/9, -7/9, -11/9). \end{aligned}$$

(b) Om $s_i > 0$ (dvs $t_i < 0$) så ligger $P_i$ på den sida av planet som normalvektorn $\mathbf{n}$ pekar åt, om $s_i < 0$ (dvs $t_i > 0$) så ligger $P_i$ på den motsatta sidan, och om $s_i = 0$ (dvs $t_i = 0$) så ligger $P_i$ i planet.
Eftersom i vårt fall $t_1 > 0$, $t_2 = 0$ och $t_3 < 0$ så ligger punkterna $P_1$ och $P_3$ på varsin sida av planet medan $P_2$ ligger i planet (så att $Q_2 = P_2$).

Om man sätter $P_4 = (0,0,0)$ i formeln ovan så erhålls att $t_4 = 1/9 > 0$, och därmed är det endast $P_1$ av de tre givna punkterna som ligger på samma sida om planet som origo.

$\square$

**Svar:**

(a) De närmaste punkterna är $Q_1 = (11/9, 5/9, 4/9)$, $Q_2 = P_2 = (1,1,1)$ respektive $Q_3 = (17/9, -7/9, -11/9)$.

(b) $P_1$ ligger på samma sida om planet som origo, men inte $P_2$ och $P_3$.

## DEL C

(7) Låt $A$ vara en symmetrisk $3 \times 3$-matris som har ett egenvärde som är lika med $2$. Anta att alla vektorer som uppfyller $x - 2y + z = 0$ är egenvektorer till $A$ med egenvärdet $1$.

(a) Bestäm en egenvektor med egenvärde $2$. **(1)**

(b) Bestäm matrisen $A$. (*Ledning*: Börja med att bestämma en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer till $A$.) **(3)**

*Lösning.* (a) Eftersom egenvekorer som hör till olika egenvärden till symmetriska matriser är ortogonala mot varandra måste egenvektorerna med egenvärde $2$ vara normalvektorer till planet av egenvektorer med egenvärde $1$. Vi kan läsa av en normalvektor som koefficienterna i ekvatinonen för planet och får därmed egenvektorerna med egenvärde $2$ som $t(1, -2, 1)$, där $t \neq 0$.

(b) Vi kan nu finna en ortogonal bas av egenvektorer genom att välja två ortogonala vektorer i planet $x - 2y + z = 0$. Den ena kan kan väljas som $(1, 1, 1)$ och vi kan få den andra genom kryssprodukten med $(1, -2, 1)$, dvs $(1, 1, 1) \times (1, -2, 1) = (1 - (-2), -1 - (-1), -2 - 1) = (3, 0, -3)$.

Vi kan nu med ett ortogonalt basbyte med matrisen

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

diagonalisera $A$ till

$$P^{\mathsf{T}} A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså kan vi beräkna $A$ genom

$$\begin{aligned} A &= P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{\mathsf{T}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En alternativ metod är att se att $A - I$ har ett tvådimensionellt egenrum med egenvärde $0$, dvs ett tvådimensionelt nollrum, och ett endimensionellt egenrum med egenvärde ett som ges av linjen med rikntningsvektor $(1, -2, 1)$. Dessutom är dessa båda egenrum ortogonala mot varandra. Alltså har vi $A-I$ är standardmatrisen för den ortogonala projektionen på vektorn $\mathbf{u} = (1, -2, 1)$. Om vi tänker på $\mathbf{u}$ som en kolonnmatris kan därför $A - I$ skrivas som

$$\frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \frac{1}{1^2 + (-2)^2 + 1}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi får nu $A$ som $I + (A - I)$, dvs

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

□

**Svar:**

(a) $(1, -2, 1)$ är en egenvektor med egenvärde $2$.

(b) Matrisen ges av

$$A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

(8) På campus finns det två studentpubar $A$ och $B$. Varje fredag fördelar sig studenterna efter följande mönster, som enbart beror på pubvalet förra helg. Av de studenter som var på pub $A$ kommer $60\%$ välja pub $A$ igen, medan de resterande $40\%$ väljer pub $B$. Av dem som var på pub $B$ förra helgen kommer enbart $20\%$ välja pub $B$, medan $80\%$ väljer pub $A$. Vid terminstart väljer $50\%$ av studenterna pub $A$ och $50\%$ av studenterna väljer pub $B$.

(a) Låt $a_n$ vara andelen studenter som väljer pub $A$ fredag $n$ och $b_n$ vara andelen studenter som väljer pub $B$ fredag $n$. Visa att vi då har sambandet

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}60 & 0{,}80 \\ 0{,}40 & 0{,}20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

för $n \geq 0$ om vi numrerar fredagarna $0, 1, 2 \ldots$. **(1)**

(b) Vad blir fördelningen av studenterna på de olika pubarna vid slutet av studietiden (d.v.s. efter en mycket lång tid)? **(3)**

*Lösning.* (a) Enligt texten har vi att $a_{n+1} = 0{,}60a_n + 0{,}80b_n$ och $b_{n+1} = 0{,}40a_n + 0{,}20b_n$, vilket kan formuleras som matrisprodukten

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}60 & 0{,}80 \\ 0{,}40 & 0{,}20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}.$$

(b) För varje $n \geq 0$ har vi att fördelning $F_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$ ges av $F_{n+1} = AF_n$, där matrisen

$$A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Speciellt har vi att

$$F_{n+1} = AF_n = A(AF_{n-1}) = \cdots = A^{n+1}F_0.$$

Vi känner $F_0 = \begin{bmatrix} 0{,}50 \\ 0{,}50 \end{bmatrix}$, och vill beräkna $A^n F_0$, för stora $n$. Detta gör vi lättast med egenvektorer. Det karakteristiska polynomet till matrisen $A$ är

$$(\lambda - \frac{6}{10})(\lambda - \frac{2}{10}) - \frac{32}{100} = \lambda^2 - \frac{8}{10}\lambda - \frac{20}{100}.$$

Nollställen hittar vi genom kvadratkomplettering. Det vill säga vi sätter uttrycket ovan lika med noll, och erhåller att

$$(\lambda - \frac{4}{10})^2 = \frac{20}{100} + \frac{16}{100} = \frac{36}{100}.$$

Detta betyder att egenvärderna till matrisen $A$ är

$$\lambda_1 = \frac{6}{10} + \frac{4}{10} = 1 \quad \text{och} \quad \lambda_2 = \frac{-6}{10} + \frac{4}{10} = -\frac{2}{10}.$$

De tillhörande egenrummen bestämmer vi på sedvanligt sätt, och får att $E_1$ är nollrummet till

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-8}{10} \\ \frac{-4}{10} & \frac{8}{10} \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är $E_1 = (2t, t)$, godtyckliga tal $t$. Egenrummet $E_2$ blir nollrummet till $\begin{bmatrix} \frac{-8}{10} & \frac{-8}{10} \\ \frac{-4}{10} & \frac{-4}{10} \end{bmatrix}$, vilket betyder att $E_2 = (t, -t)$. En bas för egenrummet väljer vi som $\beta = \{(2,1),(1,-1)\}$. Vi har att $A = P^{-1}DP$, där $P$ är basbytesmatrisen från standardmatrisen till basen $\beta$, och där

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Matrisen $P^{-1}$ är basbytesmatrisen från basen $\beta$ till standardbasen, och denna läser vi av som

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

En välkänd formel ger att

$$P = (P^{-1})^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

För varje $n \geq 0$ har vi att $A^n = P^{-1}D^nP$. Vi beräknar

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{5})^n \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & (-\frac{1}{5})^n \\ 1 & -(-\frac{1}{5})^n \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ & \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2+(-\frac{1}{5})^n & 2-2(-\frac{1}{5})^n \\ 1-(-\frac{1}{5})^n & 1+2(-\frac{1}{5})^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi har att $F_0 = \begin{bmatrix} 0{,}50 \\ 0{,}50 \end{bmatrix}$. Detta betyder att för varje $n > 0$ har vi att

$$F_n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2+(-\frac{1}{5})^n & 2-2(-\frac{1}{5})^n \\ 1-(-\frac{1}{5})^n & 1+2(-\frac{1}{5})^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}50 \\ 0{,}50 \end{bmatrix}.$$

Speciellt har vi att om $n >> 0$ blir stor, eventuellt går mot oändligheten, så kommer $(\frac{1}{5})^n$ gå mot $0$. Detta ger att

$$F_\infty = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\cdot 0{,}50 + 0 + 2\cdot 0{,}50 - 0 \\ 0{,}50 - 0 + 0{,}50 + 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs fördelningen av studenter blir $2/3 \approx 67\%$ på pub $A$ och $1/3 \approx 33\%$ på pub $B$.

□

**Svar:**

(b) Fördelningen i slutet av studieten är $2/3$ av studenterna på pub $A$ och $1/3$ av studenterna på pub $B$.

(9) För alla vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^3$ gäller att

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0.$$

Bevisa detta genom att

(a) Visa att vänsterledet, $T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, är linjärt i $\mathbf{u}$ när $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ fixerade. **(1)**

(b) Visa att vänsterledet är noll om $\mathbf{u}$ är en linjärkombination av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. **(1)**

(c) Visa att vänsterledet är noll om $\mathbf{u}$ är ortogonal mot både $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. **(1)**

(d) Förklara varför man från (a)-(c) kan dra slutsatsen att påståendet gäller för alla vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^3$. **(1)**

*Lösning.* (a) Genom att använda distributiva lagen för kryssprodukten får vi

$$\begin{aligned}
&T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w})\\
&= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)) + \mathbf{w} \times ((\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times \mathbf{v}) =\\
&= \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}_1)\\
&+\mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}_2) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}) =\\
&= \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}_1) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v})\\
&+\mathbf{u}_2 \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}_2) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v})\\
&= T(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + T(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w})
\end{aligned}$$

och vidare har vi

$$\begin{aligned}
&T(a\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})\\
&= (a\mathbf{u}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times (a\mathbf{u})) + \mathbf{w} \times ((a\mathbf{u}) \times \mathbf{v})\\
&= a\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times a(\mathbf{w} \times \mathbf{u})) + \mathbf{w} \times a(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\\
&= a\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + a\mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u})) + a\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\\
&= aT(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})
\end{aligned}$$

(b) På grund av linjäriteten räcker det att visa påståendet för $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Vi får

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v})\\
&= \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) - \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{0}) = 0.
\end{aligned}$$

och på samma sätt

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v})\\
&= \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{0}) - \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0
\end{aligned}$$

(c) På grund av linjäriteten från del (a) räcker det att visa påståendet för en enhetsvektor som är ortogonal mot både $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Om vi ser på vektorer i planet som är ortogonalt mot $\mathbf{u}$ innebär nu kryssprodukten med $\mathbf{u}$ från vänster en rotation med $\pi/2$ åt ena hållet, och kryssprodukt med $\mathbf{u}$ från höger en rotation med $\pi/2$ åt andra hållet. (Om det är medurs eller moturs beror på från vilket håll vi ser på planet.)
Den första termen $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ är noll eftersom $\mathbf{u}$ är parallell med $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. De båda andra termerna är multipler av $\mathbf{u}$. För att se att dessa tar ut varandra ser vi på vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$ och vinkeln mellan $\mathbf{w}$ och $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Dessa är lika eftersom vi i det första fallet roterat $\mathbf{w}$ med $\pi/2$ åt ena hållet, och i det andra fallet roterat $\mathbf{v}$ åt andra hållet lika mycket. Det rör sig därmed om två kryssprodukter av vektorer

med längderna $|\mathbf{v}|$ och $|\mathbf{w}|$ och med samma vinkel mellan. Det enda som skiljer är ordningen mellan faktorerna och därmed kommer de att ta ut varandra.

(d) Vi kan skriva varje vektor $\mathbf{u}$ som summan av en vektor $\mathbf{u}_1$ som ligger i spannet av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ med en vektor $\mathbf{u}_2$ som är ortogonal mot både $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. På grund av linjäriteten från (a) har vi därmed att

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = T(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + T(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 + 0 = 0,$$

där vi utnyttjar resultaten från (b) och (c) för att se att de båda termerna är noll.

$\square$