KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Kontrollskrivning 1
Måndagen den 13 september, 2010

Skrivtid: 17.30-18.30
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Uppgiften bedöms med upp till 12 poäng. För att uppgiften skall kunna tillgodoräknas på tentamen krävs minst 7 poäng, vilket ger 3 poäng på uppgift 1. För att få fyra poäng på uppgift 1 krävs minst 9 poäng.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innbär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

1. För varje tal a har vi ekvationssystemet i tre okända x, y och z som ges av

$$(\star)\quad \begin{cases} (a-3)y &= 1, \\ 2x - ax + ay - 3y + 2z - az &= 1, \\ (4-2a)x + (2a-6)y + 5z - 2az &= 3. \end{cases}$$

   Visa att ekvationssystemet $(\star)$ har en unik lösning om och endast om $a \neq 2$ och $a \neq 3$. Lös sedan ekvationssystemet $(\star)$ då $a = 2$ med hjälp av radoperationer på totalmatrisen för systemet. **(4)**

2. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $(0,1,-2)$, $(3,0,-1)$ och $(2,1,0)$, och avgör om linjen $(x,y,z) = (1,1,-1) + t\cdot(3,1,5)$ ligger i detta plan. **(4)**

3. Förklara med hjälp av egenskaperna hos determinanter varför det för kvadratiska matriser, A, i allmänhet gäller att $\det(A^TA) = (\det(A))^2$ och använd sedan detta för att beräkna $\det(A^TA)$ i specialfallet när

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (4)