KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 1
Måndagen den 13 september, 2010

UPPGIFT

(1) För varje tal a har vi ekvationssystemet i tre okända x, y och z som ges av

$$(\star) \quad \begin{cases} (a-3)y &= 1, \\ 2x - ax + ay - 3y + 2z - az &= 1, \\ (4-2a)x + (2a-6)y + 5z - 2az &= 3. \end{cases}$$

Visa att ekvationssystemet $(\star)$ har en unik lösning om och endast om $a \neq 2$ och $a \neq 3$. Lös sedan ekvationssystemet $(\star)$ då $a = 2$ med hjälp av radoperationer på totalmatrisen för systemet. **(4)**

(2) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $(0, 1, -2)$, $(3, 0, -1)$ och $(2, 1, 0)$, och avgör om linjen $(x, y, z) = (1, 1, -1) + t \cdot (3, 1, 5)$ ligger i detta plan. **(4)**

(3) Förklara med hjälp av egenskaperna hos determinanter varför det för kvadratiska matriser, A, i allmänhet gäller att $\det(A^T A) = (\det(A))^2$ och använd sedan detta för att beräkna $\det(A^T A)$ i specialfallet när

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(4)

(1) Ett linjärt ekvationssystem med lika många ekvationer som obekanta har en unik lösning om och endast om determinanten av koefficientmatrisen inte är noll. I vårt fall är koefficientmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a-3 & 0 \\ 2-a & a-3 & 2-a \\ 4-2\,a & 2\,a-6 & 5-2\,a \end{bmatrix}$$

och vi kan beräkna determinanten med hjälp av kofaktorutveckling efter första raden och får

$$\begin{aligned} \det(A) &= (a-3)(-1)^3 \det \begin{bmatrix} 2-a & 2-a \\ 4-2\,a & 5-2\,a \end{bmatrix} \\ &= (3-a)(2-a) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4-2\,a & 5-2\,a \end{bmatrix} \\ &= (3-a)(2-a)(1\cdot(4-2a) - 1\cdot(5-2a)) = -(3-a)(2-a) \end{aligned}$$

där vi i andra steget tagit ut den gemensamma faktorn $(2-a)$ från första raden.

Det är nu klart att $\det(A) \neq 0$ precis om $a \neq 2$ och $a \neq 3$.

När $a = 2$ får blir totalmatrisen för ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

och med Gauss-Jordans metod får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} -r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_3 \\ r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eftersom första kolonnen saknar ledande ett är x en fri variabel och vi sätter $x = t$ för en reell parameter t. Vi kan sedan lösa ut de båda övriga variablerna med hjälp av de nollskilda ekvationerna och får $y = -1$ och $z = 1$. Alltså ges lösningen till ekvationssystemet av $(x, y, z) = (t, -1, 1)$, där t är en reell parameter.

(2) För att bestämma en ekvation för planet behöver vi finna en normalvektor $\overline{n}$. Vi kan få en sådan genom att beräkna kryssprodukten mellan två vektorer i planet. Vi kan använda de tre givna punkterna för att hitta två sådana vektorer

$$\overline{u} = \overline{PR} = \overline{OR} - \overline{OP} = (3, 0, -1) - (0, 1, -2) = (3, -1, 1)$$

och

$$\overline{u} = \overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = (2, 1, 0) - (0, 1, -2) = (2, 0, 2).$$

Därmed får vi

$$\begin{aligned} \overline{n} &= \overline{u} \times \overline{v} = (3, -1, 1) \times (2, 0, 2) \\ &= ((-1) \cdot 2 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2, 3 \cdot 0 - (-1) \cdot 2) \\ &= (-2, -4, 2) = -2(1, 2, -1) \end{aligned}$$

Planets ekvation kan därmed skriva som $x + 2y - z = d$, för någon konstant d och vi kan bestämma d genom att sätta in någon av punkterna, tex P i ekvationen och får då

$$d = 0 + 2 \cdot 1 - (-2) = 4.$$

Därmed är en ekvation för planet $x + 2y - z = 4$.

För att avgöra om linjen ligger i planet sätter vi in $(x, y, z) = (1, 1, -1) + t \cdot (3, 1, 5)$ i ekvationen och får då

$$x + 2y - z = (1 + 3t) + 2 \cdot (1 + t) - (-1 + 5t) = 4,$$

vilket visar att linjen ligger i planet. Vi kunde också ha kontrollerat det genom att se att punkten $(1, 1, -1)$ ligger i planet och att linjens riktningsvektor är ortogonal mot planets normalvektor.

(3) Vi har att determinanten av en produkt är produkten av determinanterna. Dessutom är determinanten av en matris lika med determinanten av transponatet av matrisen. Därmed får vi att

$$\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)\det(A) = (\det(A))^2.$$

För att beräkna $\det(A^T A)$ kan vi därför först beräkna determinanten av A och får då

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} r_1 \\ -r_2 \\ r_3 + r_2 \\ r_4 \end{bmatrix} \\
&= -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = -(-(-3)\cdot 4 - 1\cdot 1) = 13.
\end{aligned}$$

Vi får nu att $\det(A^T A) = (\det(A)^2) = 13^2 = 169$.

Svar:

a) Lösningen ges av $(x, y, z) = (t, 1, -1)$, där t är en reell parameter.
b) En ekvation för planet ges av $x + 2y - z = 4$ och linjen ligger i planet.
c) $\det(A^T A) = 169$.

PRELIMINÄRA BEDÖMNINGSKRITERIER

Mindre räknefel ger i allmänhet inget avdrag, om de inte väsentligen förändrar karaktären hos uppgiften.

a)
- Korrekt villkor till när ekvationssystemet har en unik lösning, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av determinant eller motsvande argument för att systemet har en unik lösning om och endast om $a \neq 2$ och $a \neq 3$, **1 poäng**.
- Korrekt Gausselimination av totalmatrisen då $a = 2$, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats om lösningsmängden då $a = 2$, **1 poäng**.

b)
- Korrekt metod för att bestämma normal till planet, **1 poäng**.
- Korrekt beräknad normal, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av ekvation för planet, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats om att linjen ligger i planet, **1 poäng**.

c)
- Korrekt hänvisning till egenskaperna hos determinanten för att visa att $\det(A^T A) = (\det(A))^2$, **1 poäng**.
- Principiellt beräkning av determinanten med hjälp av rad- och kolonnoperationer eller kofaktorutveckling, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av $\det(A)$, **1 poäng**.
- Korrekt slutsats om att $\det(A^T A) = 169$, **1 poäng**.