KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Bedömningskriterier till tentamen
Onsdagen den 16 mars, 2011

Allmänt gäller följande:

- Om lösningen helt saknar förklarande text till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med “FTS” (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med “FLFT” (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.

DEL A

(1) (a) Använd Gauss-Jordanelimination för att beräkna inversen av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3)

(b) Använd resultatet från (a) för att lösa matrisekvationen $XA = B$, där

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1)

Bedömning:

(a)
- Korrekt metod för att bestämma A^{-1}, **1 poäng**.
- Korrekt påbörjad Gausselimination , **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av A^{-1}, **1 poäng**.

(b) Korrekt användning av A^{-1} för att lösa matrisekvationen, **1 poäng**.

---

(2) Låt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representera en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ med avseende på standardbasen.

(a) Beräkna $T(1, 2, -2)$. **(1)**

(b) Bestäm *kärnan*[1] till T, dvs nollrummet till matrisen A. **(2)**

(c) Visa att $T(1, 0, 0), T(0, 1, 0)$ och $T(0, 0, 1)$ är linjärt beroende. **(1)**

Bedömning:

(a) Korrekt beräkning av värdet, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt uppställt system för att bestämma kärnan, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av kärnan, **1 poäng**.

(c) Korrekt motivering till att vektorerna är linjärt beroende.

---

(3) Låt T vara den linjära avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som ges av standardmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm standardmatrisen för sammansättningen $T \circ T$. **(1)**

(b) Bestäm en bas för $\mathbb{R}^2$ som består av egenvektorer till A. **(3)**

Bedömning:

(a) Korrekt beräkning av standardmatrisen för sammansättningen, **1 poäng**

(b)
- Korrekt motiverade egenvärden, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av en egenvektor, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av bas av egenvektorer , **1 poäng**.

DEL B

(4) Om vi har en triangel med sidlängderna a, b och c kan vi beräkna arean som $\frac{1}{4}\sqrt{-\det(A)}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Använd denna formel för att beräkna arean av en triangel med sidlängderna $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ och $2\sqrt{2}$. **(4)**

Bedömning:

- Korrekt insättning av värdena i matrisen , **1 poäng**.
- Korrekt princip för beräkning av determinant, **1 poäng**.

[1] eng. *kernel*

- Korrekt slutförd beräkning av determinant, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats, **1 poäng**.

---

(5) Studera $\mathbb{R}^4$ med den vanliga euklidiska inre produkten $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Låt W vara det delrum till $\mathbb{R}^4$ som ges av lösningsmängden till ekvationen

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0.$$

(a) Bestäm en bas för W. **(1)**

(b) Använd Gram-Schmidts metod för att utgående från basen i (a) hitta en ortonormal bas för W. **(3)**

Bedömning:

(a) Korrekt bestämd bas för W, **1 poäng**

(b)
- Korrekt första steg i Gram-Schmidts metod för att bestämma $\mathbf{v}_2$, **1 poäng**.
- Korrekt andra steg i Gram-Schmidts metod för att bestämma $\mathbf{v}_3$, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd normering av den ortogonala basen, **1 poäng**.

---

(6) (a) Redogör för hur vi kan bestämma den punkt Q i ett givet plan med ekvation på formen $ax + by + cz = d$ som ligger närmast en given punkt P i rummet.
Illustrera metoden genom att för var och en av de tre punkterna $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (1, 1, 1)$ och $P_3 = (2, -1, -1)$ bestämma motsvarande närmsta punkt i planet med ekvationen $x - 2y + 2z = 1$. **(3)**

(b) Använd räkningarna ovan för att avgöra vilka (om någon) av punkterna P_1, P_2 och P_3 som ligger på samma sida av planet som origo. **(1)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt princip för att bestämma närmaste punkt med förklaring eller figur, **1 poäng**.
- Korrekt användning av kända formler för att bestämma närmaste punkter, **1 poäng**.
- Korrekt genomförda beräkningar med givna punkter, **1 poäng**.
- , **1 poäng**.

(b) Korrekt motiverad slutsats om vilka punkter som ligger på samma sida som origo, **1 poäng**

DEL C

(7) Låt A vara en symmetrisk 3×3-matris som har ett egenvärde som är lika med 2. Anta att alla vektorer som uppfyller $x - 2y + z = 0$ är egenvektorer till A med egenvärdet 1.

(a) Bestäm en egenvektor med egenvärde 2. **(1)**

(b) Bestäm matrisen A. (*Ledning*: Börja med att bestämma en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer till A.) **(3)**

Bedömning:

(a) Korrekt motiverad egenvektor med egenvärde 2, **1 poäng**

(b)
- Korrekt beräkning av ortogonal bas av egenvektorer, **1 poäng**.

- Korrekt användning av basbytesmatris för att bestämma A, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av matrisen A, **1 poäng**.

---

(8) På campus finns det två studentpubar A och B. Varje fredag fördelar sig studenterna efter följande mönster, som enbart beror på pubvalet förra helg. Av de studenter som var på pub A kommer 60% välja pub A igen, medan de resterande 40% väljer pub B. Av dem som var på pub B förra helgen kommer enbart 20% välja pub B, medan 80% väljer pub A. Vid terminstart väljer 50% av studenterna pub A och 50% av studenterna väljer pub B.

(a) Låt a_n vara andelen studenter som väljer pub A fredag n och b_n vara andelen studenter som väljer pub B fredag n. Visa att vi då har sambandet

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}60 & 0{,}80 \\ 0{,}40 & 0{,}20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

för $n \geq 0$ om vi numrerar fredagarna $0, 1, 2 \ldots$. **(1)**

(b) Vad blir fördelningen av studenterna på de olika pubarna vid slutet av studietiden (d.v.s. efter en mycket lång tid)? **(3)**

Bedömning:

(a) Korrekt förklaring till matrisrekursionen, **1 poäng**

(b)
- Korrekt diagonaliserng av A, **1 poäng**.
- Korrekt användning av diagonaliseringen för beräkning av potenser , **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av fördelningen, **1 poäng**.

---

(9) För alla vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^3$ gäller att

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0.$$

Bevisa detta genom att

(a) Visa att vänsterledet, $T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, är linjärt i $\mathbf{u}$ när $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ fixerade. **(1)**

(b) Visa att vänsterledet är noll om $\mathbf{u}$ är en linjärkombination av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. **(1)**

(c) Visa att vänsterledet är noll om $\mathbf{u}$ är ortogonal mot både $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. **(1)**

(d) Förklara varför man från (a)-(c) kan dra slutsatsen att påståendet gäller för alla vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^3$. **(1)**

Bedömning:

(a) Korrekt motivering av linjäriteten, **1 poäng**.

(b) Korrekt motivering när $\mathbf{u}$ ligger i spannet av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$, **1 poäng**.

(c) Korrekt motivering när $\mathbf{u}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$, **1 poäng**.

(d) Korrekt motivering till varför (a)-(c) räcker för att bevisa påståendet, **1 poäng**.
