KTH Matematik

Kontrollskrivning 1 SF1626 Flervariabelanalys 2011

Torsdagen 7 april kl 08.15 – 09.45

Kontrollskrivningen består av tre uppgifter som var och en bedöms med maximalt 4 poäng. För full poäng på en uppgift krävs en fullständig, korrekt, väl motiverad och väl presenterad lösning.

Den som erhåller totalt 7 – 8 poäng för tillgodoräkna sig 3 poäng på uppgift 1 vid tentamen. Den som erhåller 9 – 12 poäng får tillgodräkna sig 4 poäng på uppgift 1 vid tentamen. Detta gäller vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för respektive program under läsåret 2010-2011.

Inga hjälpmedel tillåtna

Lycka till!

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(-1, 0, 1)$ till ytan

$$2x^2 - e^{xy} - \frac{1}{z} = 0 \quad .$$

2. Bestäm andra ordningens Taylorpolynom i punkten $(1, 0)$ till funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + 2y^2)$, och använd sedan detta för att beräkna ett approximativt värde till $f(0.9, 0.1)$.

3. Kurvan γ ges av

$$\gamma : \begin{cases} x(t) &= e^t + e^{-t} \\ y(t) &= e^t - e^{-t} \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty .$$

a) Visa att γ är en nivåkurva till funktionen $f(x, y) = x^2 - y^2$.

b) Visa att γ är en nivåkurva till varje funktion $g(x, y)$ som uppfyller den partiella differentialekvationen

$$y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Tips: Bilda den sammansatta funktionen $h(t) = g(x(t), y(t))$, där $x(t)$ och $y(t)$ är funktionerna ovan som definierar kurvan γ, och visa att $h'(t) = 0$ för alla t.

SVAR och LÖSNINGSFÖRSLAG

KS1 SF1626

Torsdagen 7/4 - 11

Efternamn, förnamn	Personnummer	Program	Blad nr	Uppgift nr

1. Låt $F(x,y,z) = 2x^2 - e^{xy} - \frac{1}{z}$ och låt S beteckna nivåytan $F(x,y,z) = 0$

Punkten $P = (-1,0,1)$ tillhör ytan S

ty $F(-1,0,1) = 2(-1)^2 - e^{(-1)\cdot 0} - \frac{1}{1} = 2-1-1 = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x - ye^{x}, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(P) = -4$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -xe^{y}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{z^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(P) = 1$$

$\nabla F(P) = (-4,1,1)$ är normal till tangentplanet till ytan S i punkten P

$\Rightarrow$ Tangentplanets ekvation ges av

$$-4(x+1) + 1\cdot(y-0) + 1(z-1) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\underline{-4x + y + z = 5}$: SVAR

KTH VETENSKAP OCH KONST

Efternamn, förnamn	Personnummer	Program	Blad nr	Uppgift nr

2.

$$f(x,y) = \ln(x^2+2y^2) \qquad f(1,0) = \ln 1 = 0$$

$$f'_x = \frac{2x}{x^2+2y^2} \Rightarrow f'_x(1,0) = 2$$

$$f'_y = \frac{4y}{x^2+2y^2} \Rightarrow f'_y(1,0) = 0$$

$$f''_{xx} = \frac{2(x^2+2y^2)-4x^2}{(x^2+2y^2)^2} \Rightarrow f''_{xx}(1,0) = -2$$

$$f''_{xy} = -\frac{2x\cdot 4y}{(x^2+2y^2)^2} \Rightarrow f''_{xy}(1,0) = 0$$

$$f''_{yy} = \frac{4(x^2+2y^2)-(4y)^2}{(x^2+2y^2)^2} \Rightarrow f''_{yy}(1,0) = 4$$

Andra ordningens Taylorpolynom $P(x,y)$ i $(1,0)$ ges av

$$P(x,y) = f(1,0) + f'_x(1,0)(x-1) + f'_y(1,0)\,y$$
$$+\frac{1}{2}\left(f''_{xx}(1,0)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,0)(x-1)(y-1) + f''_{yy}(1,0)\,y^2\right)$$

$$= 2(x-1) - (x-1)^2 + 2y^2$$

$$f(0.9,0.1) \approx P(0.9,0.1) = 2(-0.1) - (-0.1)^2 + 2\cdot(0.1)^2$$
$$= -0.2 + 0.01 = -0.19$$

SVAR: $P(x,y) = 2(x-1) - (x-1)^2 + 2y^2$; $f(0.9,0.1) \approx -0.19$

KTH VETENSKAP OCH KONST

Efternamn, förnamn	Personnummer	Program	Blad nr	Uppgift nr

3

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = e^t + e^{-t} \\ y(t) = e^t - e^{-t} \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty$$

a) $f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t)) = \{ f(x,y) = x^2 - y^2 \}$

$= (e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2 =$

$= e^{2t} + 2 + e^{-2t} - e^{2t} + 2 - e^{-2t} = 4$

för alla t.

Alltså är γ nivåkurvan $f(x,y) = x^2 - y^2 = 4$

b) Antag att g uppfyller $y \frac{\partial g}{\partial x} + x \frac{\partial g}{\partial y} = 0$

Bilda $h(t) = g(\gamma(t)) = g(x(t), y(t))$

Då är

$$h'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t} = y(t) \\ \frac{dy}{dt} = e^t + e^t = x(t) \end{array} \right\}$$

$$= y(t) \frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(t)) + x(t) \frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(t))$$

$= 0$ enl. förutsättning

$h'(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow h(t) = \text{konstant}$

$\Rightarrow \gamma(t)$ nivåkurva till g. V.S.B.