KTH Matematik

Kontrollskrivning 2, SF1626 Flervariabelanalys 2011
torsdagen den 5/5 2011 kl. 8.15 - 9.45

Inga hjälpmedel tillåtna.

1. a) Bestäm största och minsta värdet för funktionen $f(x,y) = y^2 - x^2y$ på den slutna triangeln med hörn i $(0,0), (1,0)$ och $(1,1)$. (3p)
b) Undersök i vilka områden $f(x,y)$ är positiv resp. negativ samt motivera varför $(0,0)$ är en sadelpunkt för $f(x,y)$. (1p)

Lösning
1a):
Inre punkter:
$f'_x = -2xy = 0$ ger $x = 0$ eller $y = 0$. Insättning i
$f'_y = 2y - x^2 = 0$ ger $x = 0 => y = 0$ och $y = 0 => x = 0$ dvs $(0,0)$ som är en hörnpunkt.
Alltså inga kritiska inre punkter.

Randen:
I. Sidan mellan $(0,0)$ och $(1,1)$
$h_1(x) = f(x,x) = x^2 - x^3,\ 0 < x < 1,\ h'_1 = 2x - 3x^2 = x(2-3x) = 0$, ger $x = 0 => y = 0$ (hörn) och $x = 2/3 => y = 2/3$. Kritisk punkt $(2/3, 2/3)$, $\quad f(2/3, 2/3) = 4/9 - 8/27 = 4/27$.
II. Sidan mellan $(0,0)$ och $(1,0)$:
$h_2(x) = f(x,0) = 0,\ 0 < x < 1$ Ingen sträng extrempunkt.
III. Sidan mellan $(1,0)$ och $(1,1)$:
$h_3(y) = f(1,y) = y^2 - y,\ 0 < y < 1$. $h'_3 = 2y - 1 = 0$ ger $y = 1/2, x = 1$.
Kritisk punkt $(1, 1/2)$, $\quad f(1, 1/2) = 1/4 - 1/2 = -1/4$.

Hörn:
$f(0,0) = f(1,0) = f(1,1) = 0$.

Eftersom vi har en differentierbar och alltså kontinuerlig funktion på

ett kompakt område antas ett största och ett minsta värde bland inre kritiska punkter, kritiska randpunkter samt hörnpunkter till randen. Jämförelse ger
Svar: $f_{min} = f(1, 1/2) = -1/4$, $f_{max} = f(2/3, 2/3) = 4/27$.

1b): $f(x, y) = y(y - x^2)$
Man finner att $f > 0$ i $V_1 = \{(x, y) : y > 0, y > x^2\}$ och $V_2 = \{(x, y) : y < 0\}$ samt
$f < 0$ i $V_3 = \{(x, y) : y > 0, x > 0, y < x^2\}$ och $V_4 = \{(x, y) : y > 0, x < 0, y < x^2\}$.
Punkten$(0, 0)$ är randpunkt till alla fyra ovanstående mängder, vilket innebär att varje öppen omgivning till $(0, 0)$ innehåller både en punkt där $f(x, y) > 0$ och en punkt där $f(x, y) < 0$.
Alltså är $(0, 0)$ en sadelpunkt till $f(x, y)$.

2. Betrakta dubbelintegralen $I = \int\int_D F(x, y)dxdy$, där D är området som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = 2x$
a) Integralen kan antingen beräknas genom integration i x-led först eller genom integration i y -led först. Ange enkelintegralernas gränser i de båda fallen. (2p)
b) Beräkna I i fallet $F(x, y) = y$. (2p)

Lösning
2a.
Svar:
$$I = \int_0^4 (\int_{y/2}^{\sqrt{y}} F dx) dy \quad = \quad \int_0^2 (\int_{x^2}^{2x} F dy) dx$$
.

2b.
Med $F(x, y) = y$ får man
$$I = \int_0^2 (\int_{x^2}^{2x} y dy) dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2x} dx \quad = \int_0^2 \left(2x^2 - x^4/2\right) dx =$$
$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{10}\right]_0^2 = 16/3 - 32/10 = \underline{\frac{32}{15}}$$

3. Beräkna trippelintegralen

$$\int\int\int_K zdxdydz$$

där området K definieras av $z^2 \geq (x^2+y^2), \quad 0 \leq z \leq R \quad$ och R är en konstant.

Lösning

Ytan $z^2 = x^2 + y^2$ är en cirkulär kon som skär planet $z = R$ i cirkeln $x^2 + y^2 = R^2, z = R$. Denna cirkel är rand till en cirkelyta vars projektion i xy-planet vi här kallar $D_R : x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$. Man får

$$\int\int\int_K zdxdydz = \int\int_{D_R} \Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{R} zdz\Big)dxdy =$$

$$= \int\int_{D_R} \Big[z^2/2\Big]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{R} dxdy = \frac{1}{2}\int\int_{D_R}(R^2 - x^2 - y^2)dxdy = \Big[pol.koord.\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\int\int_{D_R}(R^2 - r^2)rdrd\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2 r - r^3)dr =$$

$$= (1/2)2\pi \cdot \Big[R^2 r^2/2 - r^4/4\Big]_0^R =$$

$\pi(R^4/2 - R^4/4) = \underline{\frac{\pi}{4}R^4.}$