## Additionsformeln för cosinus-funktionen

PROPOSITION: För alla reella tal $u$ och $v$ gäller att

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v.$$

BEVIS: Inför punkterna $P_u = (\cos u, \sin u)$, $P_v = (\cos v, \sin v)$ och $P_{u-v} = (\cos(u-v), \sin(u-v))$ på enhetscirkeln. Låt också $A$ beteckna punkten med koordinater $(1,0)$, $A = (1,0)$, som också ligger på enhetscirkeln, och låt $O$ beteckna origo, $O = (0,0)$.

Man ser att trianglarna $P_uOP_v$ och $P_{u-v}OA$ bägge är likbenta trianglar med två sidor av längd ett och mellanliggande vinkel $u-v$. Följaktligen är även tredje sidan i de bägge trianglarna lika långa, dvs avståndet mellan $P_u$ och $P_u$ är detsamma som avståndet mellan $P_{u-v}$ och $A$. Avståndsformeln ger alltså att

$$(\cos u - \cos v)^2 + (\sin u - \sin v)^2 = (\cos(u-v) - 1)^2 + (\sin(u-v) - 0)^2$$

Om vi utvecklar bägge led, och utnyttjar trignonmetriska ettan får vi

$$2 - 2\cos u \cos v - 2\sin u \sin v = 2 - 2\cos(u-v)$$

som efter förenkling ger att

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v.$$