

Hans Thunberg
KTH Matematik
SF1661 Perspektiv på Matematik

Kompletterande uppgifter till Föreläsning 10: Funktionsbegreppet

- (1) Visa att en linjär funktion $f(x) = kx + m$ är inverterbar om och endast om $k \neq 0$. Bestäm också ett uttryck för inversfunktionen f^{-1} . Verifiera att $f(f^{-1}(x)) = x$ och att $f^{-1}(f(x)) = x$ för alla $x \in \mathbf{R}$.
- (2) a) För vilka positiva heltal n är funktionen $f(x) = x^n$ inverterbar på hela $\mathbf{R}$? Vilken är då dess invers?
b) För vilka reella tal r är funktionen $f(x) = x^r$ inverterbar på intervallet $[0, \infty)$ (dvs $0 \leq x < \infty$)? Vilken är då dess invers? Ge exempel!
- (3) Denna uppgift vill belysa sambandet mellan ekvationslösning och funktioners inverterbarhet genom några exempel.
 - a) Lös ekvationen $\sqrt[3]{x-2} = 5$.
 - b) Visa att ekvationen $\sqrt[3]{x-2} = c$ har precis en lösning för varje värde på högerledet c .
 - c) Visa att funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ är inverterbar på hela reella axeln $\mathbf{R}$ och bestäm dess invers. Ange också definitionsmängd till f och f^{-1} .
 - d) Hur blir det om du istället betraktar ekvationer $\sqrt{x-2} = c$ och funktionen $f(x) = \sqrt{x-2}$?
 - e) Ekvationen $\sin x = c$ har antingen oändligt många lösningar (om $|c| \leq 1$) eller inga lösningar alls (om $|c| > 1$). (Rita figur!)
Ange det största intervall I som innehåller origo och som är sådant att funktionen $f(x) = \sin x$ är inverterbar på definitionsmängden I . Vad blir då inversens definitionsmängd? Skissera grafen $y = f^{-1}(x)$. (Denna funktion f^{-1} som du nu har skisserat grafen till kallas vanligen 'arcussinus x ' och betecknas $\arcsin x$ eller $\sin^{-1} x$.)
 - f) Formulera ett generellt påstående som som kopplar ihop lösbarheten av ekvationen $f(x) = c$ och inverterbarheten hos funktionen f . (För att få detta precist och logiskt vattentätt

krävs det bl a att man beaktar vad som är definitionsmängd och
värdemängd för funktionen f .)