Hans Thunberg
KTH Matematik
SF1661 Perspektiv på Matematik

Kompletterande uppgifter till Föreläsning 10: Funktionsbegreppet

(1) Visa att en linjär funktion $f(x) = kx+m$ är inverterbar om och endast om $k \neq 0$. Bestäm också ett uttryck för inversfunktionen f^{-1}. Verifiera att $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ och att $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

(2) a) För vilka positiva heltal n är funktionen $f(x) = x^n$ inverterbar på hela $\mathbb{R}$? Vilken är då dess invers?

b) För vilka reella tal r är funktionen $f(x) = x^r$ inverterbar på intervallet $[0, \infty)$ (dvs $0 \leq x < \infty$)? Vilken är då dess invers? Ge exempel!

(3) Denna uppgift vill belysa sambandet mellan ekvationslösning och funktioners inverterbarhet genom några exempel.

a) Lös ekvationen $\sqrt[3]{x-2} = 5$.

b) Visa att ekvationen $\sqrt[3]{x-2} = c$ har precis en lösning för varje värde på högerledet c.

c) Visa att funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ är inverterbar på hela reella axeln $\mathbb{R}$ och bestäm dess invers. Ange också definitionsmängd till f och f^{-1}.

d) Hur blir det om du istället betraktar ekvationer $\sqrt{x-2} = c$ och funktionen $f(x) = \sqrt{x-2}$?

e) Ekvationen $\sin x = c$ har antingen oändligt många lösningar (om $|c| \leq 1$) eller inga lösningar alls (om $|c| > 1$). (Rita figur!)
Ange det största intervall I som innehåller origo och som är sådant att funktionen $f(x) = \sin x$ är inverterbar på definitionsmängden I. Vad blir då inversens definitionsmängd? Skissera grafen $y = f^{-1}(x)$. (Denna funktion f^{-1} som du nu har skisserat grafen till kallas vanligen 'arcussinus x' och betecknas $\arcsin x$ eller $\sin^{-1} x$.)

f) Formulera ett generellt påstående som som kopplar ihop lösbarheten av ekvationen $f(x) = c$ och inverterbarheten hos funktionen f.(För att att få detta precist och logiskt vattentätt krävs det bl a att man beaktar vad som är defintionsmängd och värdemängd för funktionen f.)