

Kompletterande uppgifter till Föreläsning 12 och 13

- (1) Förklara, utan att beräkna integralerna, varför det gäller att

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \quad \text{och} \quad \int_0^{\pi} \cos x \, dx = 0$$

- (2) Lös Övning 10, sidan 27, i Gottliebs *Funktionslära*. Vilken integral är det du approximerar i denna uppgift?
- (3) a) Vad kan man säga om funktionen $f(x)$ och dess graf $y = f(x)$ om derivatan $f'(x)$ är > 0 för alla x i ett visst intervall?
b) Vad kan man säga ifall andraderivatan $f''(x)$ (dvs derivatans derivata) är positiv i ett intervall? Om den är negativ?
c) Exemplifiera med några funktioner t ex $f(x) = x^2$ och $g(x) = x^3$.
- (4) a) Bestäm tangentlinjen $y = L(x) = ax + b$ till funktionen $f(x) = x^2$ i punkten $(1, 1)$. Rita sedan i samma figur tangentlinjen $y = L(x)$ och funktionsgrafen $y = f(x)$ i ett intervall kring punkten $x = 1$, t ex över intervallet $0 \leq x \leq 2$.
b) Verifiera att tangentlinjen också kan bestämmas med hjälp av formeln $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (där $x_0 = 1$ i detta fall).
c) Övertyga dig själv, genom att studera figuren, om att funktionsvärdet $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ för x nära $x_0 (= 1)$, och att approximationen blir bättre ju mindre $|x - x_0|$ är (dvs ju närmare x ligger x_0).
d) Beräkna med hjälp av den linjära approximationen approximativa värden på $(0.98)^2$ och $(1.01)^2$.

KOMMENTAR: Formeln för linjär approximation kan också skrivas på den mer kortfattade formen

$$\Delta f \approx \frac{df}{dx} \Delta x,$$

där $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, $\frac{df}{dx} = f'(x_0)$ och $\Delta x = (x - x_0)$.

V G Vänd!

- (5) Bestäm ett approximativt värde till $\sqrt[3]{7.9}$.
- (6) Summan $\sum_{k=1}^{100} k^4$ kan tolkas som en summa av areor hos 100 rektanglar med basen 1 och höjder $1^4, 2^4, \dots, 100^4$.

Visa med lämplig figur att

$$\int_0^{100} x^4 dx < \sum_{k=1}^{100} k^4 < \int_0^{100} (x+1)^4 dx$$

och visa sedan genom att beräkna integralerna och göra lämplig uppskattningar att att summans värde uppfyller

$$2 \cdot 10^9 < \sum_{k=1}^{100} k^4 < 3 \cdot 10^9.$$

Sensmoral: Knepiga summor kan ibland approximeras med enkla integraler.

- (7) Under vissa förhållanden gäller att ljudets utbredningshastighet v [m/s] i luft beror på temperaturen T [K] enligt formeln

$$v = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

där v_0 är utbredningshastigheten vid en referenstemperatur T_0 .

Man vill beräkna utbredningshastigheten v med hjälp av denna formel och mäter upp lufttemperaturen 300°K . Uppskatta det relativa felet i utbredningshastighet som uppstår om temperaturmätningen har ett absolut mätfel om 3°K .

- (8) En cylinder är 10 dm hög och har ett cirkulärt tvärsnitt med radien 2 dm. Densiteten ρ hos cylindern varierar med höjden enligt formeln $\rho(h) = 240 - 2h^2$ [g/dm³]. Härled en integralformel för cylinderns massa och beräkna massan.

SVAR TILL VALDA UPPGIFTER:

- (2) Vid indelning i n delintervall fås ett approximativt värde på $\int_0^1 2^x dx$ (dvs den sökta arean) som ges av en geometrisk summa med första term $\frac{1}{n} 2^{1/n}$ och kvot $2^{1/n}$, med summa $\frac{1}{n} \frac{2^{1/n} - 1}{2^{1/n} - 1}$ som för stora värden på n är ≈ 1.44 .

- (4) Tangentlinjen ges av $y = 1 + 2(x - 1) \iff y = 2x - 1$. Linjär approximation kring $x_0 = 1$ ger $0.98^2 \approx 0.96$ och $1.01^2 = 1.02$.

- (5) $\sqrt[3]{7.9} \approx \frac{239}{120} \approx 1.992$ (7) $1/200$