SF1661 Perspektiv på matematik
Kontrollskrivning 2, 29 september 2011
Lösningsförslag

1. a) Bestäm en tredjegradsekvation på formen

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

som har rötter $x = 2$, $x = -2$ och $x = 1$.

Lösningsförslag A. Polynomet $f(x) = (x-2)(x+2)(x-1)$ har egenskapen att $f(2)$, $f(-2)$ och $f(1)$ alla är noll. Utveckling ger att

$$(x-2)(x+2)(x-1) = (x^2-4)(x-1) = x^3 - x^2 - 4x + 4.$$

Ekvationen $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ har alltså den önskade egenskapen.

Lösningsförslag B (skiss). Stoppar vi in $x = 2$, $x = -2$ och $x = 1$ i ekvationen $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} 8 + 4b + 2c + d = 0 \\ -8 + 4b - 2c + d = 0 \\ 1 + b + c + d = 0 \end{cases}$$

Från de två första ekvationerna kan man komma fram till att $c = -4$ och $d = -4b$, vilket instoppat i den tredje ekvationen ger $1 + b - 4 - 4b = 0$, det vill säga $b = -1$ och därmed $d = 4$. Vi erhåller alltså ekvationen $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

1. b) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen

$$\sqrt{2^{x+1} - \frac{3}{4}} = 2^x.$$

Lösningsförslag. Genom att notera att $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, kan vi med hjälp av substitutionen $t = 2^x$ skriva om ekvationen på formen

$$\sqrt{2t - \frac{3}{4}} = t. \tag{1}$$

Kvadrering ger

$$2t - \frac{3}{4} = t^2 \Longleftrightarrow t^2 - 2t + \frac{3}{4} = 0.$$

Genom kvadratkomplettering erhåller vi att

$$(t-1)^2 = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow t = 1 \pm \frac{1}{2}.$$

Vi får alltså två lösningar: $t = 3/2$ och $t = 1/2$.

* Med $t = 3/2$ får vi $2^x = 3/2$, det vill säga $x = \log_2 \frac{3}{2}$.
* Med $t = 1/2$ får vi $2^x = 1/2$, det vill säga $x = -1$, ty $1/2 = 2^{-1}$.

Vi hittar alltså lösningarna $x = \log_2 \frac{3}{2}$ och $x = -1$.

För full poäng på en tentamen bör man motivera att båda lösningarna är giltiga, vilket säkrast sker genom att stoppa in lösningarna i ursprungsekvationen och kontrollera.

2. a) Utveckla $(2+x)^7$.

Lösningsförslag. Vi har att

$$\begin{aligned}(2+x)^7 &= \binom{7}{0}2^7x^0 + \binom{7}{1}2^6x^1 + \binom{7}{2}2^5x^2 + \binom{7}{3}2^4x^3 + \binom{7}{4}2^3x^4 \\ &\quad + \binom{7}{5}2^2x^5 + \binom{7}{6}2^1x^6 + \binom{7}{7}2^0x^7.\end{aligned}$$

För att bestämma binomialkoefficienterna kan man antingen använda sig av formeln $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ eller skriva upp Pascals triangel till rad 7:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 21 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Vi kommer fram till att

$$\begin{aligned}(2+x)^7 &= 2^7 + 7\cdot 2^6x + 21\cdot 2^5x^2 + 35\cdot 2^4x^3 + 35\cdot 2^3x^4 \\ &\quad + 21\cdot 2^2x^5 + 7\cdot 2x^6 + x^7 \\ &= 128 + 448x + 672x^2 + 560x^3 + 280x^4 + 84x^5 + 14x^6 + x^7,\end{aligned}$$

vilket är den sökta utvecklingen.

2. b) Beräkna $\binom{15}{3}$ och $\binom{15}{12}$.

Lösningsförslag. Vi har att $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, vilket innebär att

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455,$$

och $\binom{15}{12} = \binom{15}{3} = 455$.

I händelse av att man glömt ovanstående formel kan man lösa även denna uppgift genom att skriva upp Pascals triangel, denna gång till rad femton. Det blir mycket jobb, men notera att man inte behöver räkna ut alla tal i triangeln, bara de fyra första i varje rad:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4
1 5 10 10
1 6 15 21
1 7 21 35
1 8 28 56
1 9 36 84
1 10 45 120
1 11 55 165
1 12 66 220
1 13 78 286
1 14 91 364
1 15 105 455

3. a) Vilka reella tal karaktäriseras av att de har en oändlig decimalbråksutveckling som aldrig upprepar sig periodiskt? Ge också två exempel på sådana tal.

   Lösningsförslag. De tal som efterfrågas är **icke-rationella** eller **irrationella** tal, alltså tal som inte kan skrivas som kvoten mellan två heltal. Exempel på sådana tal är π, e (basen för den naturliga logaritmen), $\sqrt{2}$ och $\sqrt{3}$.

3. b) Talet x har den oändliga periodiska decimalbråksutvecklingen

$$x = 10{,}101010\ldots = 10{,}\overline{10}.$$

Uttryck talet x exakt, utan att använda en oändlig decimalbråksutveckling.

Lösningsförslag A. Notera att decimalbråksutvecklingen har en period på två decimaler. Multiplicerar vi x med $10^2 = 100$, får vi därmed ett tal vars utveckling efter kommatecknet överensstämmer med den för x:

$$100x = 1010{,}101010\ldots = 1010{,}\overline{10}.$$

Detta innebär att differensen $100x - x = 99x$ blir

$$1010{,}\overline{10} - 10{,}\overline{10} = 1010 - 10 = 1000,$$

och vi drar slutsatsen att

$$x = \frac{1000}{99} = 10 + \frac{10}{99}.$$

Lösningsförslag B. Notera att talet x kan skrivas

$$\begin{aligned} x &= 10 + 10^{-1} + 10^{-3} + 10^{-5} + \cdots \\ &= 10(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + \cdots). \end{aligned}$$

Vi har alltså att

$$x = a + ak + ak^2 + ak^3 + \cdots,$$

där $a = 10$ och $k = 10^{-2}$. Värdet på denna geometriska serie räknar vi ut genom att multiplicera x med k och subtrahera:

$$x - xk = (a + ak + ak^2 + \cdots) - (ak + ak^2 + ak^3 + \cdots) = a.$$

Detta ger att

$$x = \frac{a}{1-k} = \frac{10}{1-10^{-2}} = \frac{10}{99/100} = \frac{1000}{99}.$$

Observera att de båda lösningsmetoderna är snarlika.