Föreläsning 8.

1 Blasius gränsskikt

Då en en friström, U, möter en plan, mycket tunn platta som är parallell med friströmshastigheten uppkommer den enklaste typen av gränsskikt. För detta gränsskikt är tryckgradienten, $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$, lika med noll. Ekvationerna som beskriver gränsskiktet kan således skrivas

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial u^2}{\partial y^2}\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\,. \tag{2}$$

Inkompressibilitetsvillkoret (2) tillåter oss att införa en strömfunktion, Ψ, som definieras genom att hastighetskomponenterna kan skrivas

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,. \tag{3}$$

Om vi sätter in dessa uttryck i ekvation (1) så får vi

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}\,. \tag{4}$$

Vi kan alltid addera en godtycklig konstant till strömfunktionen utan att (3) upphör att gälla. Därför kan vi utan att förlora i generalitet sätta

$$\Psi = 0 \ \text{ då } \ y = 0\,. \tag{5}$$

Om vi låter $(x, y) = (0, 0)$ vara den position vid vilken friströmmen möter plattan, så kan de övriga randvillkoren för Ψ skrivas

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \ \text{ då } \ y = 0 \ \text{ och } \ x > 0\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \rightarrow U \ \text{ då } \ y \rightarrow \infty\,. \tag{7}$$

Vi ska nu söka en likformighetslösning till (4). Vi gör detta genom ansatsen

$$u = Ug(\eta)\,, \tag{8}$$

där

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}\,, \tag{9}$$

och $\delta(x)$ har dimensionen längd och representerar gränsskiktets tjocklek. Som vi ska se så kommer $\delta(x)$ att växa med x, vilket betyder att gränsskiktstjockleken växer nedströms. Exakt hur $\delta(x)$ växer ska vi bestämma genom själva antagandet att det existerar en likformighetslösning. Med likformighetsansatsen (8) kan vi kan nu skriva strömfunktionen som

$$\Psi = \int_0^y u \, \mathrm{d}y = U\delta \int_0^\eta g(\eta) \, \mathrm{d}\eta = U\delta f(\eta) \, . \tag{10}$$

De olika derivatorna av Ψ kan nu skrivas

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = U\left(\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} f + \delta \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = U\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}(f - \eta f') \, , \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = U\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y}(f - \eta f') = -U\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}\frac{\eta f''}{\delta} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = Uf' \, , \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{Uf''}{\delta} \, , \tag{14}$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{Uf'''}{\delta^2} \, . \tag{15}$$

Vi sätter nu in (11-15) i (4) och får då ekvationen

$$-\left(\frac{U\delta}{\nu}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}\right) f f'' = f''' \, . \tag{16}$$

En likformighetslösning existerar bara om faktorn inom parantes i vänsterledet är oberoende av x, d v s om den är lika med en konstant. Utan att förlora i generalitet kan vi sätta denna konstant till 1/2 och får då

$$\frac{U\delta}{\nu}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \, . \tag{17}$$

Ekvation (16) kan nu skrivas

$$\frac{1}{2} f f'' + f''' = 0 \, . \tag{18}$$

Randvillkoren för f blir

$$f' \to 1 \;\; \text{då} \;\; \eta \to \infty \, , \tag{19}$$

$$f'(0) = f(0) = 0 \, . \tag{20}$$

Ekvationen (18) med randvillkoren (19-20) kan inte lösas analytiskt annat än i termer av en serie. Enklast och mest praktiskt är att lösa den numeriskt. Hastighetskomponenterna fås sedan som

$$\frac{u}{U} = f' \, , \tag{21}$$

$$\frac{v}{U} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}(\eta f' - f) = \frac{1}{2\sqrt{Re_x}}(\eta f' - f) \, , \tag{22}$$

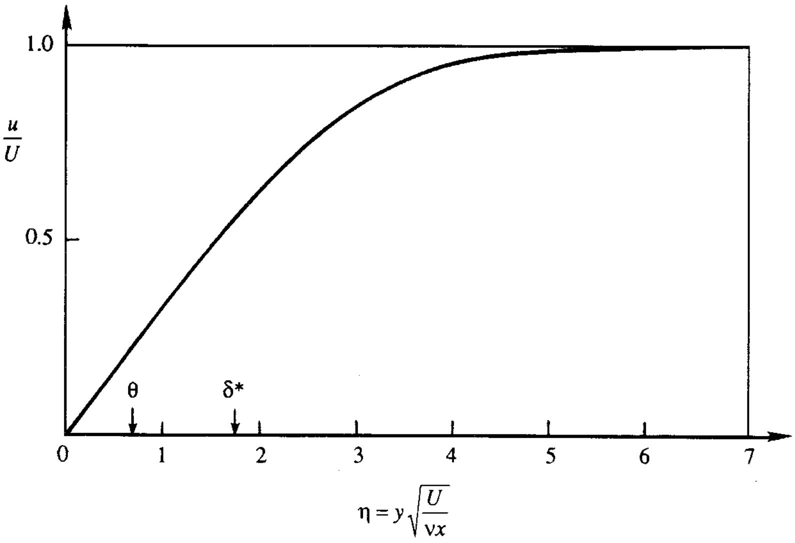

Figure 1: u/U som funktion av η för Blasiusgränsskiktet.

där $Re_x = Ux/\nu$ är Reynoldstalet som baserar sig på nedströmspositionen x. I figur (1) ser vi u/U som funktion av η och i figur (2) ser vi $v\sqrt{Re_x}/U$ som funktion av η. Ur lösningen till Blasiusekvationen så kan vi också räkna ut väggskjuvspänningen,

$$\tau_v = \mu \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\mu U f''(0)}{\delta} = \frac{0.332 \rho U^2}{\sqrt{Re_x}} \,. \tag{23}$$

Det totala aerodynamiska motståndet per längdenhet i z-led på plattan mellan $x = 0$ och $x = L$ fås genom integration,

$$D = \int_0^L \tau_v \, \mathrm{d}x = \frac{0.664 \rho U^2 L}{\sqrt{Re_L}} \,, \tag{24}$$

där $Re_L = UL/\nu$. Motsåndskoefficienten, C_D, blir då

$$C_D = \frac{D}{(1/2)\rho U^2 L} = \frac{1.33}{\sqrt{Re_L}} \,. \tag{25}$$

Från uttrycket (22) ser vi att den vertikala hastigheten skulle bli oändligt stor om Blasius likformighetslösning skulle gälla för $x = 0$. Detta är uppenbart orimligt. I själva verket så kan gränsskiktsapproximationen endast gälla en bit nedströms framkanten av plattan, då det lokala Reynoldstalet Re_x har blivit tillräckligt stort. Ytterligare något nedströms så börjar likformighetslösningen att gälla, och gäller sedan till en punkt där strömningen blir instabil, vilket sker då $Re_x = Re_{kr} \approx 5 \times 10^5$. Ytterligare en bit nedströms övergår gränsskiktet till ett turbulent tillstånd. De olika faserna i gränsskiktets utveckling är illustrerade i figur 3.

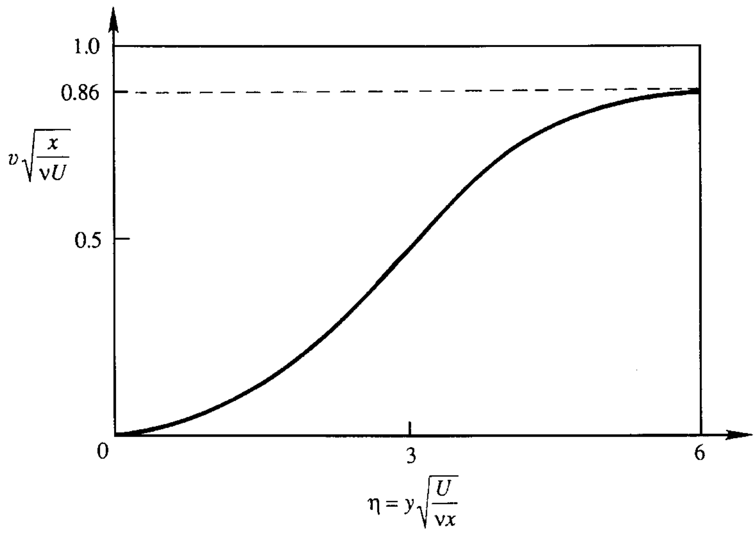

Figure 2: $v\sqrt{Re_x}/U$ som funktion av η för Blasiusgränsskiktet.

2 Falkner-Skan lösningar

Vi betraktar nu en konvergerande eller divergerande tvådimensionell kanal, för vilken höjden, h, varierar enligt

$$h = cx^{-n}\,. \tag{26}$$

Volymsflödet (per längdenhet i z-led) genom kanalen kan då uppskatts som

$$q = U_e c x^{-n}\,, \tag{27}$$

där U_e är friströmmen i kanalen. Eftersom q är konstant får vi alltså att

$$U_e = a x^{n}\,, \tag{28}$$

där a är en konstant. Enligt vad vi visade i föreläsning 7 så kommer då ekvationen för gränsskiktet att innehålla ytterligare en term, jämfört med (4), och ha följande utseende

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = U_e \frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}\,. \tag{29}$$

Med likformighetsansatsen

$$\Psi(x,y) = \sqrt{\nu U_e(x) x}\, f(\eta) = \sqrt{\nu a}\, x^{(n+1)/2} f(\eta)\,, \tag{30}$$

$$\eta = \frac{y}{x}\sqrt{Re_x} = \sqrt{\frac{a}{\nu}}\, x^{(n-1)/2}\,. \tag{31}$$

transformeras den partiella differentialekvationen (29) till den ordinära differentialekvationen

$$f''' + \frac{n+1}{2} f f'' - n f'^2 + n = 0\,. \tag{32}$$

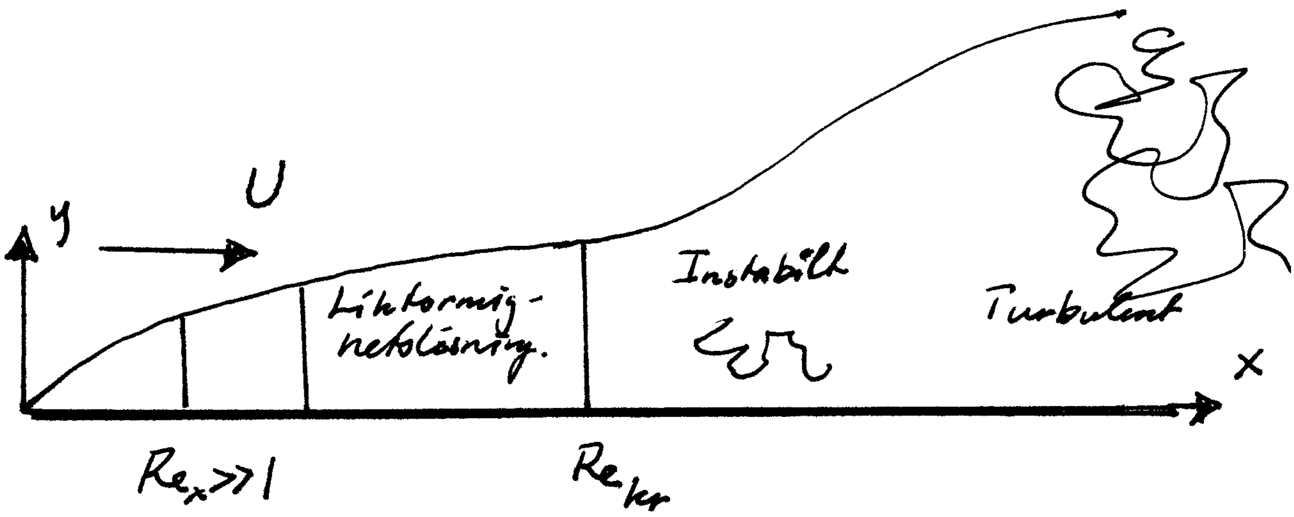

Figure 3: De olika stadierna i gränsskiktets utveckling. Först då $Re_x \gg 1$ börjar gränsskiktsapproximationen att gälla. Därefter så kommer såsmåning Blasius likformighetslösning att gälla. Vid $Re_x = Re_{kr} \approx 5 \times 10^5$ blir gränsskiktet instabilt och en bit nedströms blir det fullt turbulent.

Randvillkoren för (32) är dem samma som för Blasiusekvationen (18). I själva verket är Blasiusekvationen ett specialfall av (32) med $n = 0$.

3 Vaken bakom en plan platta.

Vi ska nu ge ytterligare ett exempel på hur en likformig utveckling av ett strömningsfält. Vi betraktar vaken bakom en tunn plan platta med likadana hastighetsprofiler på ovan och undersidan (se figur 4). En liten bit nedströms bakkanten på plattan så kan vi anta att x-hastigheten kan skrivas

$$u = U - u_s(x, y)\,, \tag{33}$$

där U är friströmshastigheten och $|u_s| \ll U$. Om längdskalan i x-led är L och vakens bredd är $\delta \ll L$ så kan vi uppskatta storleken av y-hastigheten genom

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad v \sim \frac{\delta}{L} u_s\,. \tag{34}$$

Eftersom friströmshastigheten inte varierar med x så kommer tryckgradienten, $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$, att vara noll, eller nära noll. Vi kan nu skriva x-komponenten av rörelsemängdsekvationen som

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)\,. \tag{35}$$

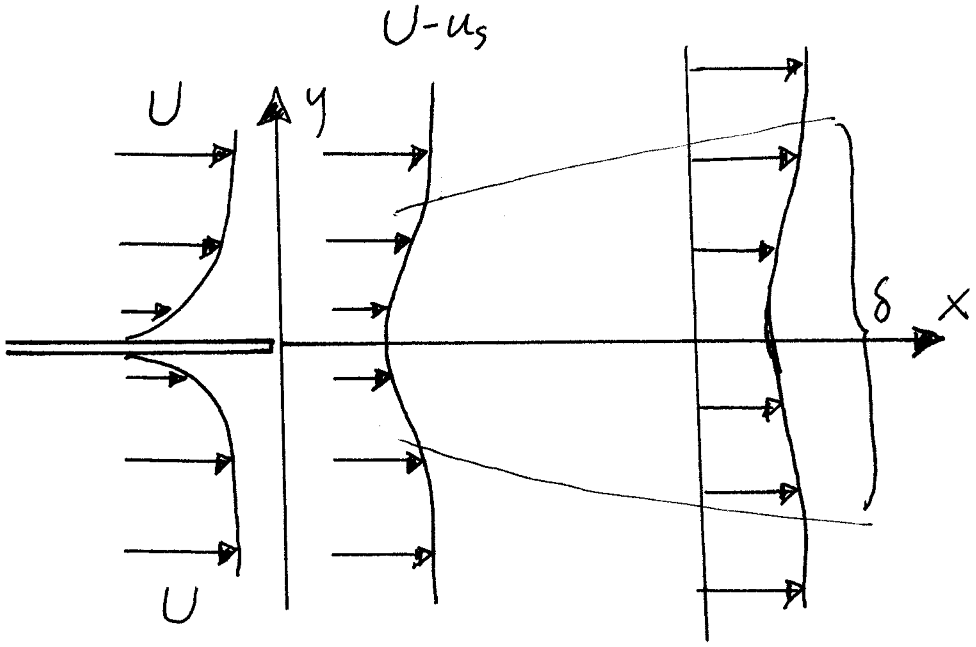

Figure 4: Vaken bakom en tunn plan platta utvecklar sig likformigt en liten bit nedströms plattans bakkant.

Om vi sätter in uttrycket (33) i (35) och använder de storleksordningsuppskattningar som vi har gjort så får vi följande förenklade och approximativa ekvation

$$U \frac{\partial u_s}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} \,. \tag{36}$$

Från denna ekvation följer att rörelsemängdsflödet (per längdenhet i z-led) är konstant i vaken,

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{-\infty}^{\infty} u_s \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_s}{\partial x} \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{U} \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} \, \mathrm{d}y = \left[\frac{\nu}{U} \frac{\partial u_s}{\partial y} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \,. \tag{37}$$

Vi använder nu q för att göra följande likformighetsansats

$$u_s(x,y) = \frac{q}{\delta(x)} f(\eta) \ \text{ där } \ \eta = \frac{y}{\delta(x)} \,, \tag{38}$$

och δ är en ännu så länge obestämd längd som varierar med x. Funktionen $\delta(x)$ representerar vakens bredd. Med denna likformighetsansats så får vi ett normaliseringsvillkor för f,

$$q = \frac{q}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \, \mathrm{d}y = q \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \, \mathrm{d}\eta \ \Rightarrow \ \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \, \mathrm{d}\eta = 1 \,. \tag{39}$$

Dessutom har vi följande randvillkor och symmetrivillkor för f,

$$f \to 0 \text{ då } \eta \to \pm\infty\,, \quad f'(0) = 0\,, \tag{40}$$

där det andra villkoret fås från det faktum att f måste vara jämn i η och anta ett maximum för $\eta = 0$. Med likformighetsansatsen (38) får vi

$$\frac{\partial u_s}{\partial x} = -\frac{q}{\delta^2}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}f - \frac{q}{\delta}f'\frac{y}{\delta^2}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = -\frac{q}{\delta^2}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}(f + \eta f')\,, \tag{41}$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial y} = \frac{q}{\delta}f'\frac{1}{\delta}\,, \tag{42}$$

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} = \frac{q}{\delta^3}f''\,. \tag{43}$$

Vi sätter nu in (41) och (43) i (36) och får

$$\frac{U\delta}{\nu}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}(f + \eta f') = -f''\,. \tag{44}$$

För att en likformighetslösning ska existera krävs att den vänstra faktorn i vänsterledet är konstant. Utan att förlora i generalitet kan vi sätta denna konstant till 1/2 och får då

$$\frac{U\delta}{\nu}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}\,. \tag{45}$$

Vakens bredd, $\delta(x)$, utvecklar sig alltså på precis samma sätt som gränsskiktstjockleken i Blasiusgränsskiktet. Ekvation (44) kan nu skrivas

$$\frac{1}{2}(f + \eta f') = -f''\,. \tag{46}$$

Om vi integrerar (46) en gång så får vi

$$\frac{1}{2}\eta f = -f' + A\,, \tag{47}$$

där A är en integrationskonstant. Symmetrivillkoret ger att $A = 0$. Vi kan nu separera ekvationen och integrera ytterligare en gång,

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = -\frac{1}{2}\eta\,\mathrm{d}\eta \quad\Rightarrow\quad f = Be^{-\eta^2/4}\,, \tag{48}$$

där B är en integrationskonstant. Normaliseringsvillkoret (39) ger att

$$B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2/4}\,\mathrm{d}\eta = B\,2\sqrt{\pi} = 1 \quad\Rightarrow\quad B = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,. \tag{49}$$

Lösningen för vakhastigheten kan nu skrivas

$$u = U - q\sqrt{\frac{U}{4\pi\nu x}}e^{-y^2U/(4\nu x)}\,. \tag{50}$$

Observera att lösningen (50) börjar gälla en bit nedströms plattans bakkant vid $x = 0$, eftersom villkoret $u_s \ll U$ måste vara uppfyllt.