

Föreläsning 9.

1 Potentiallösningen för strömningen kring en cylinder

I denna föreläsningen ska vi behandla strömningen kring en kropp som inte är strömlinjeformad och som ett speciellt exempel ska vi betrakta strömningen kring en cylinder.

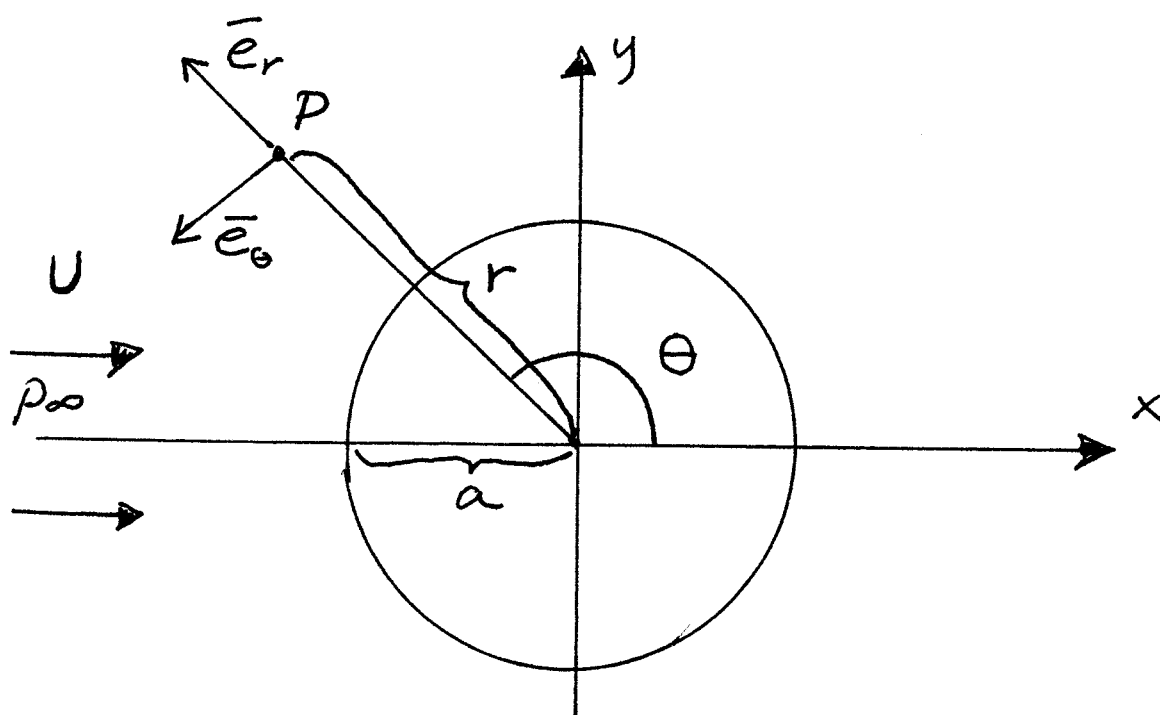


Figure 1: Vi löser Laplace-ekvationen för den rotationsfria strömningen kring en cylinder. Randvillkoret på cylinder är att den radiella hastighetskomponenten u_r är noll på cylindern.

Vi börjar med att härleda den klassiska potentiallösningen för inviskös, inkompressibel och rotationsfri strömning kring en cylinder. Att strömningen är rotationsfri innebär att det existerar en hastighetspotential, ϕ , sådan att hastighetsfältet kan skrivas

$$\mathbf{u} = \nabla \phi . \quad (1)$$

Att strömningen är inkompressibel innebär att $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, vilket ger Laplace-ekvationen

$$\nabla^2 \phi = 0 . \quad (2)$$

Vi ska nu lösa Laplace-ekvationen för den strömning som uppkommer kring en cylinder med en konstant friström U . Cylinderns radie är a och vi låter friströms-hastigheten vara parallell med x -axeln. Då potentialen är given kan den radiella och azimutala hastighetskomponenten räknas ut som

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}. \quad (3)$$

I cylinderkoordinater kan Laplace-ekvationen (1) skrivas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (4)$$

Randvillkoren är

$$u_r = 0 \quad \text{då} \quad r = a \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{då} \quad r = a, \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \rightarrow U \mathbf{e}_x \quad \text{då} \quad r \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Observera att det inte är vidhäftningsvillkoret vi använder i denna analys. Eftersom vi antar att fluiden är inviskös så är den fri att glida längs cylindern och följaktligen så kräver vi inte att $u_\theta = 0$ då $r = a$. Som vi ska se så kommer u_θ inte att vara noll på cylindern. Vi ansätter nu en separabel lösning

$$\phi(r, \theta) = g(\theta)f(r), \quad (7)$$

och tillåter oss att gissa oss till formen på $g(\theta)$. Om vi gissar att $g(\theta) = \cos \theta$ eller $g(\theta) = \sin \theta$ så ser vi att det är bara med $\cos \theta$ som vi har möjlighet att uppfylla randvillkoret (6) i oändligheten, eftersom vi måste ha att

$$u_r = \frac{df}{dr}g(\theta) \rightarrow -U \quad \text{då} \quad r \rightarrow \infty \quad \text{och} \quad \theta = \pi. \quad (8)$$

Alltså gör vi ansatsen $\phi = \cos \theta f(r)$ och sätter in i ekvation (4) och får då följande ekvation för f ,

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2} f = 0. \quad (9)$$

Denna ekvation har lösningen

$$\phi = Ar + \frac{B}{r}, \quad (10)$$

där A och B är två integrationskonstanter. Randvillkoret (5) ger nu att

$$A - \frac{B}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = a^2 A, \quad (11)$$

och randvillkoret (8) ger att $A = U$. Följaktligen har vi att

$$\phi = \cos\theta Ur \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right), \quad (12)$$

$$u_r = \cos\theta U \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad (13)$$

$$u_\theta = -\sin\theta U \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right). \quad (14)$$

På cylindern är hastigheten

$$\mathbf{u}(a, \theta) = -2U \sin\theta \mathbf{e}_\theta. \quad (15)$$

Tryckfördelningen på cylindern kan vi nu få från Bernoullis ekvation. Om p_∞ är trycket långt uppströms så får vi

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_c + \frac{1}{2}\rho 4U^2 \sin^2\theta. \quad (16)$$

Tryckkoefficienten, C_p , på cylindern kan nu skrivas

$$C_p = \frac{p_c - p_\infty}{0.5\rho U^2} = 1 - 4\sin^2\theta. \quad (17)$$

Trycket är naturligtvis som störst i stagnationspunkterna, d v s de punkter där hastigheten är noll, vilken den är för $\theta = 0, \pi$ och $r = a$. Trycket är som lägst där hastigheten är som störst, vilken där är för $\theta = \pm\pi/2$ och $r = a$.

Eftersom tryckfördelning är symmetrisk kring $\theta = \pi/2$ och det inte finns något visköst motstånd så kommer det totala aerodynamiska motståndet på cylindern att vara lika med noll, enligt den rotationsfria analysen. Detta uppenbart orimliga resultat gäller för alla kroppar i rotationsfri, inviskös strömning. Som tidigare påpekats i föreläsning 7 så kallas detta resultat för "D'Alembert paradox". Något måste uppenbarligen vara fel med den rotationsfria analysen. I figur 2 ser vi C_p för den rotationsfria lösningen samt för två verkliga strömningsfält vid två olika Reynoldstal. Vi ser att tryckkoefficienten i verkligheten skiljer sig väsentligt från den rotationsfria lösningen, framför allt på nedströmssidan. Detta kan endast förstås mot bakgrund av fenomenet avlösning.

2 Avlösning

I verkligheten så kommer det på grund av vidhäftningsvillkoret att utvecklas ett tunt gränsskikt intill cylindern och i detta tunna skikt är vorticiteten mycket stor och därför gäller inte antagandet om att strömningen är rotationsfri. Då $Re \sim 4$ så kommer gränsskiktet att avlösas vid en viss punkt. Lite löst uttryckt så kan man säga att gränsskiktet kommer att "lossna" från cylindern och tunna skikt av vorticitet kommer att transporteras nedströms. Bakom avlösningpunkten så kommer

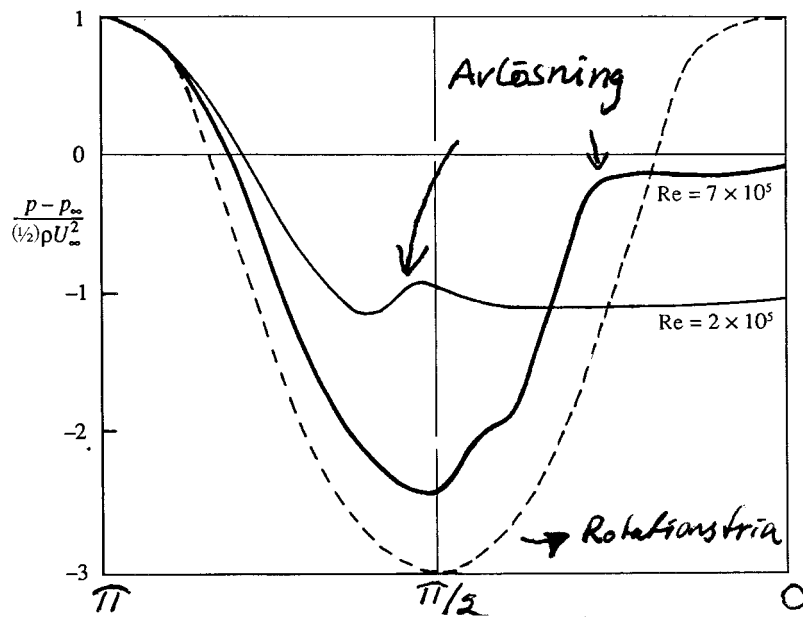


Figure 2: Tryckkoefficienten för den rotationsfria strömning och för två verkliga strömningar vid två olika Reynoldstal. Vid $Re = 2 \times 10^5$ är gränsskiktet laminärt och avlösningspunkten har flyttat sig långt uppströms. Vid $Re = 7 \times 10^5$ har gränsskiktet blivit turbulent och avlösningspunkten har därför flyttat sig nedströms.

strömningen precis intill cylindern att vara uppströms jämfört med friströmmen. Nedströms avlösningspunkten kommer det alltså att bli ett bakåtlöde precis invid randen. Det kommer att bildas två recirkulationszoner på nedströmssidan av cylindern (se figur 3).

Då $40 < Re < 200$ kommer avlösningspunkten att oscillera och det bildas så kallade von Karman-virvlar bakom cylindern. Virvlarna avlöser ömsom på den ena och ömsom på den andra sidan av cylindern, med en viss given frekvens. Det susande ljudet man kan höra då vinden blåser över elektriska ledningar en stilla sommarkväll, uppkommer på grund av denna virvelavlösning.

Då Reynoldstalet ökas ytterligare kommer vaken i cylindern att bli turbulent och avlösningspunkten flyttar sig uppströms. För $Re \sim 3 \times 10^5$ ligger avlösningspunkten vid $\theta \approx 98^\circ$, dvs på uppströmssidan av cylindern. För högre Re så blir gränsskiktet turbulent och ett turbulent gränsskikt avlöser inte lika lätt som ett laminärt gränsskikt. Avlösningspunkten flyttar sig då nedströms och det totala aerodynamiska motståndet på cylindern sjunker därför då strömningen slår om till att vara turbulent. Det turbulenta gränsskiktet ger ett större direkt visköst motstånd, men det är inte det direkta viskösa motståndet som utgör huvuddelen av det totala motståndet. Det totala motståndet domineras av tryckmotståndet som uppstår p

g a att trycket på uppströmssidan är betydligt större än trycket i vaken.

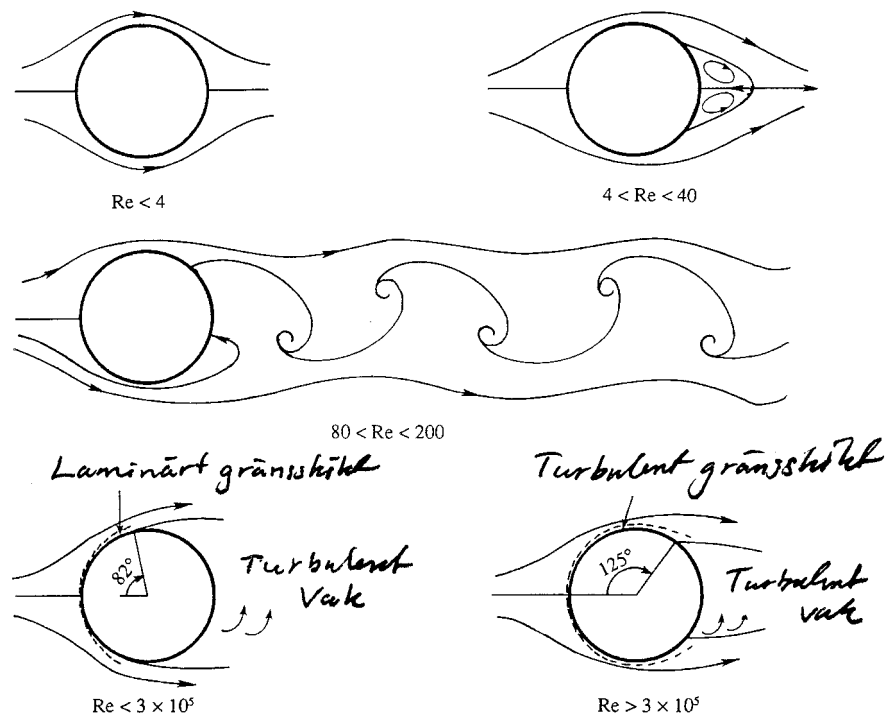


Figure 3: Strömning över en cylinder vid olika Reynoldstal.