

SF1661 Perspektiv på matematik
MODELLTENTAMEN 1

Skrivtid: 5 timmar

Inga tillåtna hjälpmedel

Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del I, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del II och de tre sista uppgifterna del III, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

| Betyg | A | B | C | D | E | Fx |
|--------------------|----|----|----|----|----|----|
| Total poäng | 27 | 24 | 21 | 18 | 16 | 15 |
| varav från del III | 6 | 3 | - | - | - | - |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

- (1) Primfaktorisera talen 924 och 198. Beräkna sedan också $\frac{3}{198} - \frac{2}{924}$.
- (2) Bestäm koefficienterna a, b, c och d sådana att polynomet $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ uppfyller $p(0) = p(-1) = p(3) = 0$ och $p(1) = 8$.
- (3) Bestäm det minsta positiva tal x sådant att $\int_0^x \cos t \, dt = 0$.

DEL II

- (4) Förenkla följande uttryck så långt som möjligt

$$\sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2 - 8x + 4}}$$

- (5) a) Bevisa att

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1. \quad (2p)$$

- b) För vilka x kan vi summera serien $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$? Vad blir då summan? (2p)

- (6) Bestäm tangentlinjen till kurvan $y = f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ i den punkt där $x = \frac{\pi}{2}$. Ange också med hjälp av linjär approximation ett approximativt värde till $f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{100}\right)$.
(Kom ihåg att $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$.)

DEL III

- (7) a) Visa att $\log_2 x = n \log_{2^n} x$ för alla reella tal $x > 0$ och alla positiva heltal n . (2p)
b) Lös ekvationen

$$\log_8 x + \log_4 x = (\log_2 x)^2.$$

Du får utnyttja påståendet i deluppgift a) även om du inte har löst del a). (2p)

- (8) Finns det något komplext tal z_0 sådant $0, w$ och $z_0 w$ utgör hörnen till en liksidig triangel i det komplexa talplanet för varje komplext tal $w \neq 0$? Bestäm i sådana fall talet z_0 .
- (9) a) Vad menas med att en mängd är uppräknelig?
b) Visa att mängden av positiva rationella tal är uppräknelig.
c) Visa att mängden av alla rationella tal också är uppräknelig.

(En synonym till *uppräknelig* är *numrerbar*. På engelska säger man *countable* eller *denumerable*.)