SF1661 Perspektiv på matematik
MODELLTENTAMEN 2

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del I, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del II och de tre sista uppgifterna del III, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Del I

(1) Talet n ges i bas 10 av $n = (184)_{10}$. Uttryck n i bas 5. Talet m ges i bas 4 av $m = (123)_4$. Uttryck m i bas 10.

(2) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $e^{3x} - e^{2x} = 2e^x$.

(3) Förklara vad som menas med att en funktion är inverterbar. Visa sedan att funktionen $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ är inverterbar och bestäm dess invers $f^{-1}(x)$.

Del II

(4) Som bekant definieras r^n för positiva heltal n av $r^n = \underbrace{r \cdot r \cdot \cdots \cdot r}_{(\ n \text{ stycken faktorer}\ )}$.

a) Hur definieras r^n för $n = 0$ och $n < 0$? Varför gör man dessa definitioner? (2p)

b) Hur definieras $r^{p/q}$ för rationella tal $\frac{p}{q}$? Varför gör man denna definition? (2p)

(5) Bestäm den konstanta termen som fås i utvecklingen av uttrycket

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^2}\right)^6 .$$

(6) a) Är det sant att $\cos 4x = 4\cos^2 x \sin^2 x + 4\cos^4 x$ för alla reella tal x? Bevisa eller motbevisa! (2p)

b) Är det sant att $\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$ för alla reella tal x? Bevisa eller motbevisa! (2p)

Del III

(7) a) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $|x+2| = |4-x|$. (1p)

b) Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $|z+2| = |4-z|$. (1p)

c) Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $|2z-1| + z = 0$. (2p)

(8) a) Formulera Faktorsatsen för polynom. (1p)

b) Ge ett exempel på hur man kan använda Faktorsatsen. (1p)

c) Bevisa Faktorsatsen. (2p)

(9) Visa att $\sum_{k=2}^{1000} \dfrac{1}{k}$ kan uppskattas med

$$3\ln 10 - \ln 2 < \sum_{k=2}^{1000} \frac{1}{k} < 3\ln 10.$$

Du kan uttnyttja att funktionen $f(x) = \ln(x+a)$ har derivata $f'(x) = (x+a)^{-1}$.