Uppgift 7

a) **Proposition**: $\log_2 x = n \log_{2^n} x$ för alla reella tal $x > 0$ och positiva heltal n.

Bevis: Ansätt $\log_2 x = a$, då har vi $2^a = x$ (*)
Ansätt $\log_{2^n} x = b$, då har vi $(2^n)^b = x \Leftrightarrow 2^{nb} = x$ (**)

Ur (*) och (**) får vi:
$2^a = 2^{nb}$
$\Leftrightarrow a = nb$ (***)

Ty $\log_2 x = a$ och $\log_{2^n} x = b$ enligt ansättningen, ser vi att:
(***) $\Leftrightarrow \log_2 x = n \log_{2^n} x$ (Q.E.D)

b) Enligt sambandet som vi ovan bevisat: $\log_{2^n} x = \frac{\log_2 x}{n}$
Nu kan vi lösa ekvationen:

$$\log_8 x + \log_4 x = (\log_2 x)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_{2^3} x + \log_{2^2} x = (\log_2 x)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{3} + \frac{\log_2 x}{2} = (\log_2 x)^2$$

Ansätt $\log_2 x = t$:

$$\frac{t}{3} + \frac{t}{2} = t^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - \frac{t}{3} - \frac{t}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - \frac{5t}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow t\left(t - \frac{5}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 5/6 \end{array}\right.$$

$t = 0$ ger $\log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$t = \frac{5}{6}$ ger $\log_2 x = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = 2^{5/6}$

Svar: Ekvationen har 2 lösningar $x = 1$ och $x = 2^{5/6}$.

Uppgift 8

Ansätt talet $w = r(\cos v + i \sin v)$ (*)

För att 0, w och $z_0 w$ ska kunna utgöra hörnen till en liksidig triangel i det komplexa talplanet, måste följande villkor uppfyllas:

- w och $z_0 w$ har samma absolutbelopp (**)
- skillnaden mellan argumenten till w och $z_0 w$ är $60°$ (***)

(Grunden till detta är att om ΔOAB har två lika långa sidor, säg $OA = OB$, samtidigt som att vinkeln mellan OA och OB är $60°$, då måste ΔOAB vara liksidig)

Ur (*), (**) och (***) vet vi att $z_0 w = r[\cos(v \pm 60°) + i \sin(v \pm 60°)]$

Då målet med uppgiften är att bestämma talet z_0, ska vi helt enkelt dividera $z_0 w$ med w:

$$\frac{z_0 w}{w} = \frac{r[\cos(v \pm 60°) + i \sin(v \pm 60°)]}{r(\cos v + i \sin v)}$$

$\Leftrightarrow z_0 = \cos(\pm 60°) + i \sin(\pm 60°)$ (division mellan 2 komplexa tal i polär form)

Det finns således 2 tal z_0 som uppfyller uppgiftens villkor:

$z_0 = \cos 60° + i \sin 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ och $z_0 = \cos(-60°) + i \sin(-60°) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Svar: $z_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$