Uppgift 7

a) $|x+2| = |4-x|$
$\Leftrightarrow x+2 = \pm(4-x)$

<u>Fall 1</u>: $x+2 = 4-x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

<u>Fall 2</u>: $x+2 = -(4-x) \Leftrightarrow x+2 = -4+x \Leftrightarrow 0x = -6$ (absurt!)

Svar: Ekvationen har en lösning $x = 1$ (eventuell kontroll kan göras).

b) $|z+2| = |4-z|$
Personligen ser jag direkt att alla komplexa tal vars reella del är lika med 1 uppfyller denna ekvation (tack vare svaret i delfråga a), men för att inte missa något poäng är det fortfarande bäst att vi löste den så utförligt vi kunde.

Ansätt $z = a + bi$:

$$|a+bi+2| = |4-(a+bi)|$$
$$\Leftrightarrow |(a+2)+bi| = |(4-a)-bi|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+2)^2+b^2} = \sqrt{(4-a)^2+b^2}$$
$$\Leftrightarrow (a+2)^2+b^2 = (4-a)^2+b^2$$
$$\Leftrightarrow (a+2)^2 = (4-a)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2+4a+4 = 16-8a+a^2$$
$$\Leftrightarrow 12a = 12$$
$$\Leftrightarrow a = 1$$

a är ju reella delen till z, så alla komplexa tal vars reella del är 1 är lösning till ekvationen.

Svar: $z = 1 + bi$ där b är ett godtyckligt reellt tal, dvs. $b \in \mathbb{R}$.

c) $|2z-1| + z = 0$
$\Leftrightarrow |2z-1| = -z$

Ansätt $z = a + bi$:

$$|2(a+bi)-1| = -(a+bi)$$
$$\Leftrightarrow |2a-1+2bi| = -a-bi \ (*)$$

Högerledet innehåller ett komplex tal, medan vänsterledet innehåller absolutbeloppet av ett komplex tal, vilket är ett reellt tal. Talet b, dvs. imaginära delen till z, måste därför vara 0:

$$(*) \Leftrightarrow |2a-1| = -a$$

$$\Rightarrow 4a^2-4a+1 = a^2 \quad \text{(kvadrera bägge led)}$$
$$\Leftrightarrow 3a^2-4a+1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 1/3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = 1/3 \end{array}\right.$$

Varken $z = 1$ eller $z = 1/3$ uppfyller ekvationen, därför saknar ekvationen lösning.

Svar: Ekvationen saknar lösning.

Uppgift 9

$$\sum_{k=2}^{1000} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{999} + \frac{1}{1000}$$

Denna summa kan tolkas som en summa av areor hos 999 rektanglar med basen 1 och höjder $1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/99, 1/1000$.

(Här ritar vi grafen till $y = 1/k$ samt dessa rektanglar i ett ky-koordinatsystem)

Vi ser tydligt att rektanglarnas sammanlagda area är större än arean under kurvan $y = 1/k$ då det alltid finns en liten ”rektangelsbit” som sticker ut ovanför kurvan. Med andra ord:

$$\sum_{k=2}^{1000} \frac{1}{k} > \int_2^{1000} \frac{1}{k} dk = [\ln k]_2^{1000} = \ln 1000 - \ln 2 = \ln 10^3 - \ln 2 = 3\ln 10 - \ln 2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{1000} \frac{1}{k} > 3ln\,10 - \ln 2 \ \ (*)$$

Om vi nu ritar grafen till $y = \frac{1}{k-1}$, ser vi även att rektanglarnas sammanlagda area är mindre än arean under kurvan $y = \frac{1}{k-1}$ (här är det otroligt viktigt att rita rätt och tydligt så att vi ser vilka punkter som grafen passerar). Med andra ord:

$$\sum_{k=2}^{1000} \frac{1}{k-1} < \int_2^{1000} \frac{1}{k-1} dk = [\ln(k-1)]_2^{1000} = \ln\ 999 < \ln 10^3 = 3\ln 10$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{1000} \frac{1}{k} < 3\ln 10 \ \ (**)$$

Ur (*) och (**) får vi:

$$3\ln 10 - \ln 2 < \sum_{k=2}^{1000} \frac{1}{k} < 3\ln 10 \qquad \blacksquare$$