Lösningsförslag till KS1, SF1661, HT11

① a)

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\sqrt{2}\right)^{4}\right)^{1/3} = \left(2^{2}+2^{\frac{1}{2}\cdot 4}\right)^{1/3}$$

$$= \left(4+2^{2}\right)^{1/3} = 8^{1/3} = 2$$

b)

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}}+\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \left\{\begin{array}{l}\text{Förläng respektive}\\ \text{term till gemensam}\\ \text{nämnare } 2(1+\sqrt{5})\end{array}\right\}$$

$$= \frac{2\cdot 2}{2(1+\sqrt{5})}+\frac{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2(1+\sqrt{5})} = \left\{\begin{array}{l}\text{Använd konjugat-}\\ \text{regeln på andra}\\ \text{termens täljare}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{4+(1-5)}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{4-4}{2(1+\sqrt{5})} = 0$$

$$\boxed{\text{SVAR: a) } 2 \quad \text{b) } 0}$$

(2)

a) En cirkel med radie r och medelpunkt (x_0, y_0) består av precis de punkter (x, y) som uppfyller

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Med $r=3$ och $(x_0, y_0) = (4, -1)$ fås

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$$

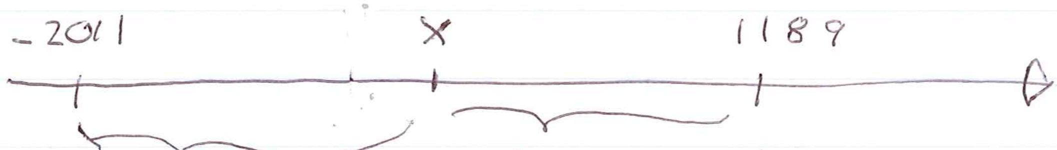
Vi undersöker nu punkten $(6, -3)$. Avståndet d från medelpunkten $(4, -1)$ till $(6, -3)$ ges enligt avståndsformeln av

$$d^2 = (6-4)^2 + (-3-(-1))^2 =$$
$$= 4 + 4 = 8$$

Eftersom $d^2 < r^2 = 9$ är $d < r$ och $(6, -3)$ befinner sig alltså inuti cirkeln.

2 b) $|x+2011| = |x-1189| \iff$

x utgör mittpunkt på intervallet med ändpunkter (-2011) och 1189 på talaxeln (eftersom $|x-a|$ kan tolkas som avståndet mellan punkterna x och a på talaxeln)



$$|x-(-2011)| = |x-1189|$$

Hela intervallet $[-2011, 1189]$ har längd $= 1189-(-2011) = 3200$

$\Rightarrow$ Mittpunkten x befinner sig på avstånd $\frac{3200}{2} = 1600$ från vardera ändpunkten

$$\Rightarrow \quad x = -2011 + 1600 = -411$$

Kontroll: $1189 - (-411) = 1600$

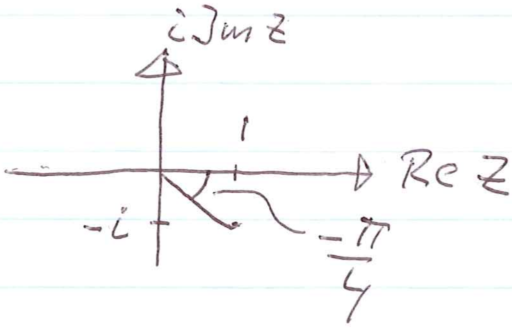
SVAR: a) $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$ och punkten $(6,-3)$ ligger innanför cirkeln.

b) $x = -411$

③ a) $\frac{u}{v} = \frac{3+3i}{1-i} = \frac{(3+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} =$

$= \frac{(3+3i^2)+i(3+3)}{1-i^2} = \frac{3-3+6i}{2} = 3i$

b) $v = 1 - i$



Vi har att

$|v| = \sqrt{1+(-1)} = \sqrt{2}$

så $v = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Alltså är

$v^7 = \sqrt{2}^7\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^7 = \left\{ \text{de Moivres formel} \right\}$

$= \sqrt{2}^7\left(\cos\left(-7\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right) =$

$= 2^{7/2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 2^3 \cdot 2^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$= 8 + 8i$

Svar: a) $3i$

b) $8 + 8i$