MODELLTENTAMEN 1, SF1661

# LÖSNINGSFÖRSLAG

(1) $924 = 2\cdot 462 = 2\cdot 2\cdot 231 = 2^2\cdot 3\cdot 77 = 2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11$

$198 = 2\cdot 99 = 2\cdot 9\cdot 11 = 2\cdot 3^2\cdot 11$

$$\frac{3}{198} - \frac{2}{924} = \frac{3}{2\cdot 3^2\cdot 11} - \frac{2}{2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 11} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11} = \frac{7-1}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11} = \frac{6}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11} = \frac{1}{77}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{SVAR:}}\quad 924 = 2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11,\quad 198 = 2\cdot 3^2\cdot 11 \\ \qquad \frac{3}{198} - \frac{2}{924} = \frac{1}{77}\end{array}}$$

(2) Om $p$ är ett tredjegradspolynom sådant $p(0)=p(-1)=p(3)=0$ gäller enligt Faktorsatsen att $x$, $(x+1)$ och $(x-3)$ är faktorer i $p(x)$. Alltså är

$$p(x) = k\,x(x+1)(x-3) = k\left(x^3 - 2x^2 - 3x\right)$$

för någon konstant $k \neq 0$.

Villkoret $p(1) = 8$ ger

$$k\left(1^3 - 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1\right) = 8 \iff -4k = 8$$

$$\iff k = -2$$

Alltså ges $p$ av

$$p(x) = -2x^3 + 4x^2 + 6x$$

Kontroll:
$$\begin{aligned}
p(0) &= 0 \\
p(-1) &= (-2)(-1) + 4 - 6 = 0 \\
p(3) &= -2\cdot 3^3 + 4\cdot 3^2 + 6\cdot 3 = -54 + 36 + 18 = 0 \\
p(1) &= -2 + 4 + 6 = 8
\end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{\text{SVAR:}} \quad p(x) = -2x^3 + 4x^2 + 6x}$$

(3.) $$\int_0^x \cos t \, dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\sin t\right]_0^x = 0$$

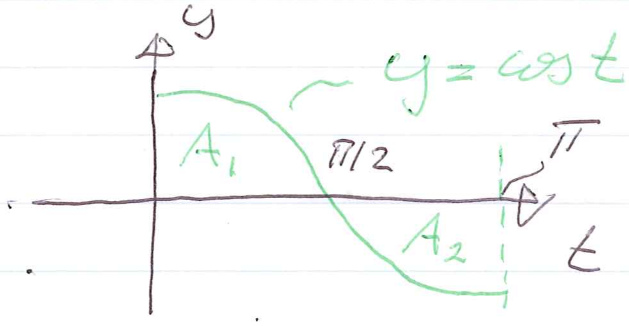
$$\Leftrightarrow \quad \sin x - \underbrace{\sin 0}_{=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = n \cdot \pi \, , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Alltså ges minsta positiva lösning av $x = \pi$

Alternativt kan man betrakta följande figur




Areorna $A_1$ och $A_2$ är lika, vilket följer av $\cos(\pi - t) = -\cos t$.

Eftersom $\cos t \geq 0$ på $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

och $\cos t \leq 0$ på $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

följer att

$$\int_0^{\pi} \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos t \, dt = A_1 - A_2 = 0$$

Att $x = \pi$ är minsta lösning följer av att om $x < \pi$ är motsvarande area $A_2 < A_1 \Rightarrow A_1 - A_2 > 0$

SVAR: $\boxed{x = \pi}$

(4) $\sqrt{\dfrac{x^4-2x^2+1}{4x^2-8x+4}} = \sqrt{\dfrac{x^4-2x^2+1}{4(x^2-2x+1)}} =$

$= \sqrt{\dfrac{(x^2-1)^2}{4(x-1)^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} \cdot \sqrt{\dfrac{((x+1)(x-1))^2}{(x-1)^2}}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x+1)^2(x-1)^2}{(x-1)^2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(x+1)^2}$

$= \dfrac{1}{2}|x+1|$

OBSERVERA ATT
$\sqrt{a^2} = |a| \neq a$

<u>SVAR:</u> $\dfrac{1}{2}|x+1|$

(5) a) Vi vill visa att

$$(1+x+x^2+ \dots +x^n) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad x \neq 1$$

Vi visar nedan att

$$(1+x+x^2+ \dots +x^n)(x-1) = (x^{n+1}-1),$$

det önskade resultat följer då genom leduis division med $(x-1)$.

$$(1+x+x^2+ \dots +x^n)(x-1) =$$

$$= (x+x^2+ \dots +x^n+x^{n+1}) - (1+x+x^2+ \dots +x^n)$$

$$= x+x^2+ \dots +x^n+x^{n+1}-1-x-x^2- \dots -x^n$$

$$= x^{n+1}-1.$$

5

b) Att summera en serie (summa med oändligt många termer) innebär att se om man närmar sig ett specifikt tal när fler och fler termer adderas, och i så fall bestämma detta värde.

Mer precist vill vi alltså i vårt fall studera gränsvärdet

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

Vi betraktar några olika fall:

Fallet $x=1$: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 1^k = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ st}})$

$= \lim_{n\to\infty} n$, som inte närmar sig något specifikt värde.

Om $x \neq 1$ vet vi från a) att

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

- om $|x|<1$ kommer $x^{n+1} \to 0$ då $x \to \infty$ så serien summeras till

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$x^{n+1} \to 0$

V.G. VÄND

(5 b forts)

Om $x=-1$ fås

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = $$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$$

Termen $(-1)^{n+1}$ kommer att alternera mellan $+1$ och $-1$ när $n$ växer, dvs ~~h~~ högerledet närmar sig inte ngt speciellt värde (det växlar mellan 0 och 1)

Om $|x|>1$ gäller att

$$|x^{n+1}| = |x|^{n+1} \to \infty \quad \text{då } n\to\infty$$

~~och~~ så inte heller i detta fall närmar sig uttrycket $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ngt. speciellt värde då $n$ växer.

$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{SVAR:}}\ \text{Serien är summerbar om och endast om } |x|<1 \\ \text{och då är} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}\end{array}}$

6.

$$y = f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Vi har att $\cos^2 v = \dfrac{1+\cos 2v}{2}$

varför vi också kan skriva

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x\right).$$

Vidare gäller att $f(\pi/2) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

och $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x\right) = -\frac{1}{2}\sin x$

så $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}$

Den sökta tangenten går igenom punkten $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$ med riktningskoefficient $k = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Enpunktsformeln ger ekvationen

$$\left(y - \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{2+\pi}{4}$$

Formeln för linjär approximation av $f(x)$ för x-värden $x = x_0 + h$, $|h|$ litet, ges av

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,h.$$

I vårt fall fås

$$f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) \approx f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)h = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}h$$

och med $h = \frac{1}{100}$ fås

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{100}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{200} = \frac{99}{200}$$

**SVAR:** Tangentlinjen ges av $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{2+\pi}{4}$.

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{100}\right) \approx \frac{99}{200}$$

(7)

a) Vi ska visa att $\log_2 x = n \log_{2^n} x$
för $x > 0$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$

Sätt $n \log_{2^n} x = t$

$\left\{\begin{matrix} r \log b \\ = \log b^r \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \log_{2^n} x^n = t \overset{\text{ekv}}{\underset{\text{def. av log}}{\Leftrightarrow}} (2^n)^t = x^n$

$\Leftrightarrow 2^{nt} = x^n \overset{\text{då}}{\underset{x>0,\ 2^t>0}{\Leftrightarrow}} 2^t = x$

$\overset{\text{def}}{\underset{\text{av log}}{\Leftrightarrow}} \log_2 x = t.$

Alltså $\log_2 x = n \log_{2^n} x$, VSB.

b) $\log_8 x + \log_4 x = (\log_2 x)^2$ skall lösas.

Enligt a) gäller $\log_8 x = \log_{2^3} x = \frac{1}{3} \log_2 x$
$\log_4 x = \log_{2^2} x = \frac{1}{2} \log_2 x.$

Så given ekvation är ekvivalent med
$\frac{1}{3} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x = (\log_2 x)^2$

Om vi sätter $\log_2 x = u$ övergår ekvationen till

$\frac{1}{3} u + \frac{1}{2} u = u^2 \Leftrightarrow u^2 - \frac{5}{6} u = 0$

$\Leftrightarrow u = 0$ eller $u = \frac{5}{6} \Leftrightarrow$ (då $x = 2^u$)

$\Leftrightarrow x = 2^0 = 1$ eller $x = 2^{5/6}.$

Kontroll: $x = 0$ ger $V.L. = \log_8 1 + \log_4 1 = 0 = (\log_2 1)^2$

$x = 2^{5/6}$ ger $V.L. = \log_8 2^{5/6} + \log_4 2^{5/6} = \frac{5}{6}(\log_8 2 + \log_4 8) =$

$= \frac{5}{6}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = (\log_2 2^{5/6})^2 = H.L.$

$\boxed{\text{SVAR, b): } x = 1 \text{ eller } x = 2^{5/6}}$

8.

Om $z_0$ och $w$ skrivs på polär form

$$z_0 = |z_0|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad -\pi < \alpha \le \pi$$

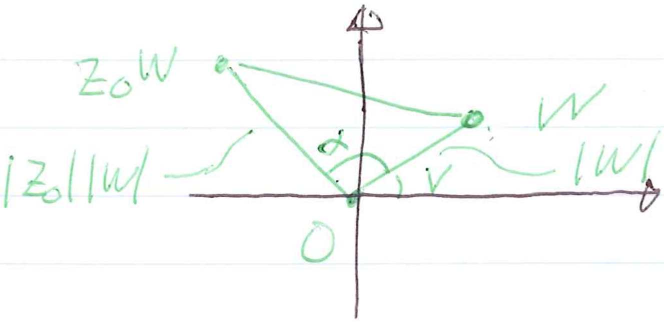
$$w = |w|(\cos v + i\sin v)$$

gäller att produkten $z_0 w$ skriven på polär form är

$$z_0 w = |z_0||w|\left(\cos(\alpha+v) + i\sin(\alpha+v)\right)$$

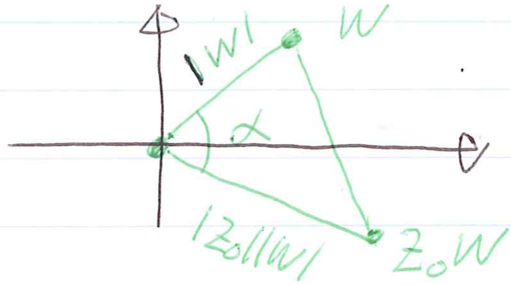
där $|z_0 w| = |z_0||w|$.

Om $0 \le \alpha \le \pi$ fås figur av typ




Om triangeln $\Delta O z_0 (z_0 w)$ ska vara liksidig gäller att $|z_0||w| = |w| \Rightarrow |z_0| = 1$ och $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (detta är också tillräckligt)

Om $-\pi \le \alpha \le 0$ fås figur av typ




Triangeln är liksidig om och endast om $|z_0||w| = |w|$, dvs $|z_0| = 1$ och $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

Det finns alltså två sådana $z_0$:

$$z_0 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

och

$$z_0 = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = +\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\boxed{\text{SVAR: } z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ och } z_0 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

9 a) och b)

Se sidan 79-80 i What is Mathematics.

9 c) Ifrån b) vet vi att $Q^+$ = (de positiva rationella talen) är en uppräknelig mängd dvs vi kan numrera alla tal i $Q^+$ med de positiva heltalen, så vi kan skriva $Q^+$ som en lista

$$Q^+ = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \ldots\ldots]$$

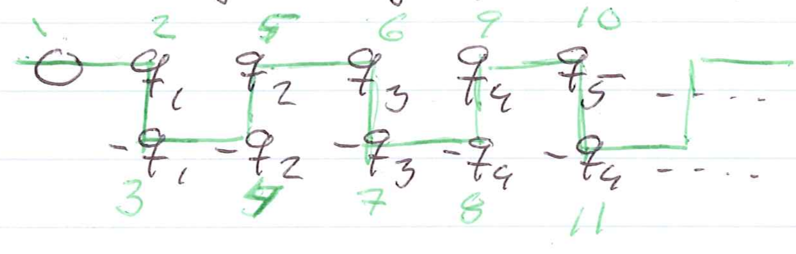
De negativa rationella talen $Q^-$ ges då av

$$Q^- = [-q_1, -q_2, -q_3, -q_4, \ldots\ldots]$$

Följande "dubbellista" kommer alltså att innehålla alla rationella tal

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & \ldots\ldots \\ & -q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 & -q_5 & -q_6 & \ldots\ldots \end{array}$$

Att numrera talen i denna "dubbellista" kan vi göra genom att följa följande väg




V.S.B.