Modelltentamen 2, SF1661
Lösningsförslag

(1) Talet $n=(184)_{10}$ skall uttryckas i bas 5, dvs vi vill hitta tal a_i, $0 \le a_i < 5$ sådana att

$$(184)_{10} = a_0 + a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 5^2 + a_3 \cdot 5^3 + \dots + a_k 5^k$$

(Eftersom $5^3 = 125 < 184 < 5^4 = 625$ behöver vi fyra termer som ovan)

Eftersom $184 = 1 \cdot 125 + 59$, $59 < 125$, är $a_3 = 1$

Vi ska nu finna a_0, a_1 och a_2 s.a.

$$59 = a_0 + a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 25$$

Eftersom $59 = 2 \cdot 25 + 9$, $9 < 25$, får vi $a_2 = 2$

Sök nu a_1 och a_0 s.a.

$$9 = a_0 + a_1 \cdot 5 \Rightarrow a_1 = 1, \quad a_0 = 4$$

Alltså

$$(184)_{10} = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4 = (1214)_5$$

Kontroll: $1 \cdot 125 + 2 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 184$

Talet $m = (123)_4 = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = (16+8+3)_{10} = (27)_{10}$

Svar: $n = (1214)_5$

$m = (27)_{10}$

(2) Vi skall lösa ekvationen $e^{3x}-e^{2x}=2e^{x}$.

Sätt $e^{x}=t$ (som är $>0 \ \forall x$).

Eftersom $(e^{nx})=(e^{x})^{n}=t^{n}$ övergår given ekvation till

$$t^{3}-t^{2}=2t \qquad (t>0)$$

$$\Leftrightarrow t^{3}-t^{2}-2t=0$$

$$\Leftrightarrow t(t^{2}-t-2)=0$$

$t=0$ är en lösning, som vi förkastar ty $t>0$.
Övriga lösningar fås av

$$t^{2}-t-2=0 \Leftrightarrow \left(t-\tfrac{1}{2}\right)^{2}-\tfrac{1}{4}-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(t-\tfrac{1}{2}\right)^{2}=\tfrac{9}{4} \Leftrightarrow t=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{9}{4}}$$

$$\Leftrightarrow t=\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{3}{2} \Leftrightarrow t=2 \text{ eller } t=-1.$$

$t=-1$ förkastas ty $t>0$.

Alltså är $t=2 \Leftrightarrow e^{x}=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$ enda lösning.

Kontroll: $V.L.=e^{3\ln 2}-e^{2\ln 2}=e^{\ln 8}-e^{\ln 4}=8-4=4$

$H.L.=2e^{\ln 2}=2\cdot 2=4$

$$\boxed{\text{SVAR: } x=\ln 2}$$

3. En funktion $f: X \to Y$ är inverterbar om

(i) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, alla $x_1, x_2 \in X$

(ii) ~~det~~ till varje $y_0 \in Y$ finns $x_0 \in X$ s.a. $f(x_0) = y_0$

Betrakta nu $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

Antag att $y = f(x)$, dvs $y = \frac{2x-1}{x+3}$.

Detta är $\Leftrightarrow (x+3)y = 2x-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy + 3y = 2x - 1 \Leftrightarrow xy - 2x = -3y - 1$

$\Leftrightarrow x(2-y) = 3y+1 \Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{2-y}$

Alltså till ett givet funktionsvärde $y \neq 2$ finns precis ett x-värde, $x = \frac{3y+1}{2-y}$, s.a. $f(x) = y$, $\Leftrightarrow$ f inverterbar enl. ovan

Vi ser också att

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2-x}$$

Kontroll: $f(f^{-1}(x)) = \frac{2f^{-1}(x) - 1}{f^{-1}(x) + 3} = \frac{2\,\frac{3x+1}{2-x} - 1}{\frac{3x+1}{2-x} + 3} =$

$$= \frac{\frac{2(3x+1) - (2-x)}{2-x}}{\frac{3x+1+3(2-x)}{2-x}} = \frac{7x}{7} = x \quad \text{OK!}$$

$$\boxed{\underline{\text{SVAR}}: \quad f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2-x}, \quad x \neq 2}$$

4. För $n>0$ följer av definitionen att

I $\quad r^n \cdot r^m = \underbrace{(r \cdots r)}_{n \text{ st}} \cdot \underbrace{(r \cdots r)}_{m \text{ st}} = r^{n+m}$

II $\quad \dfrac{r^n}{r^m} = \dfrac{\overbrace{r \cdots\cdots r}^{n \text{ st}}}{\underbrace{r \cdot r \cdots r}_{m \text{ st}}} = r^{n-m}$ om $r \neq 0$ och $n > m$.

III $\quad (r^n)^m = \underbrace{(r \cdots r)}_{n \text{ st}} \cdot \underbrace{(r \cdots r)}_{n \text{ st.}} \cdot \cdots \underbrace{(r \cdots r)}_{n \text{ st}} = r^{nm}$

m st paranteser

Om II skall gälla även för $n = m$ fås

$$1 = \frac{r^n}{r^n} = r^{n-n} = r^0$$

Vi definiera därför $r^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$

Om II skall gälla även för $n < m$ (dvs $n-m<0$, $m-n>0$) fås

$$\frac{1}{r^{m-n}} = \frac{r^n}{r^m} = \frac{\overbrace{r \cdot r \cdots r}^{n \text{ st.}}}{\underbrace{r \cdot r \cdots\cdots r}_{m \text{ st}}} = r^{n-m}$$

Vi definierar därför $r^{-n} = \dfrac{1}{r^n}$, $n > 0$, $r \neq 0$

4. (forts)

Om III skall gälla även för $n=\frac{1}{q}$, q positivt heltal fås, och $r>0$

$$\left(r^{\frac{1}{q}}\right)^{q} = r^{\frac{1}{q}\cdot q} = r$$

dvs $r^{\frac{1}{q}}$ är det tal som upphöjt till $q = r$

dvs $r^{1/q} = \sqrt[q]{r}$

så vi ~~definierar~~ $r^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{r}$, $q=2,3,4\ldots$

Om III nu också ska gälla för

$r>0$, $n=\frac{p}{q}>0$, $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, fås

$$r^{p/q} = (r^{q})^{p} = \left(\sqrt[q]{r}\right)^{p}$$

så vi <u>definierar</u> $r^{p/q} = \left(\sqrt[q]{r}\right)^{p}$,

$r>0$, $\frac{p}{q}>0$, $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$.

~~om~~

Slutligen definierar vi

$$r^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{r^{p/q}}, \quad r>0,\ p,q>0,\ \frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$$

i analogi med definitionen för negativa heltalsexponenter.

5 $\left(x^4 + \frac{1}{x^2}\right)^6 = \{\text{enligt binomialsatsen}\}$

$$= \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} (x^4)^{6-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{4(6-k)} \frac{1}{x^{2k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{24-6k}$$

Konstanttermen fås för det k s.a.

$24-6k=0 \Leftrightarrow k=4.$

så denna term är

$$\binom{6}{4} x^{24-6\cdot 4} = \binom{6}{4} x^0 = \binom{6}{4} =$$

$$= \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$$

$$\boxed{\underline{\text{SVAR}}:\ 15}$$

6 a) $\cos 4x = 4\cos^2 x \sin^2 x + 4\cos^4 x$
kan inte gälla för alla x eftersom
H.L. = summan av kvadrater ≥ 0 alla x

T.ex ger $x = \frac{\pi}{4}$

$V.L. = \cos 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \cos \pi = -1$

$H.L. = 4\cos^2\frac{\pi}{4}\sin^2\frac{\pi}{4} + 4\cos^4\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = 2 \neq V.L.$

6 b) $\sin 4x = \sin(2x + 2x)$

$= 2\sin 2x \cos 2x$

$= 2(2\sin x\cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 4\sin x\cos^3 x - 4\sin^3 x\cos x$

Svar: a) NEJ! b) JA!
Bevis, se ovan.

(7) a) $|x+2| = |4-x| \iff \{|a| = |-a|\}$

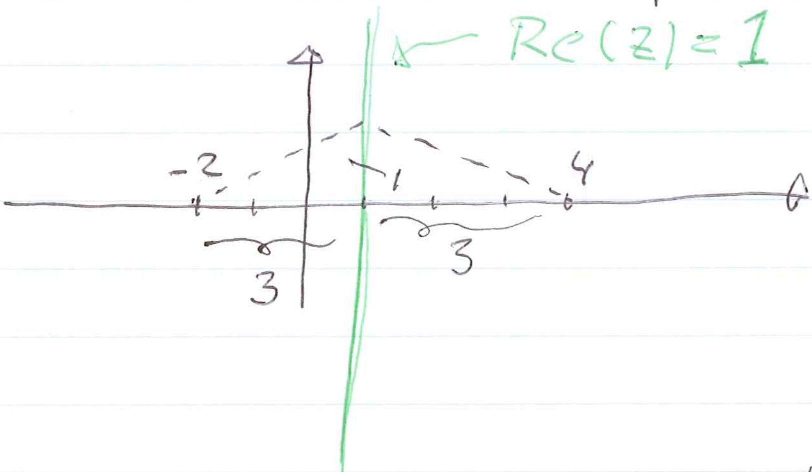
$\iff |x+2| = |x-4|$

$\iff |x-(-2)| = |x-4|$

dvs x är det tal som ligger lika långt från (-2) som från (-4) på tallinjen, dvs $x = 1$.

b) $|z+2| = |4-z| \overset{\text{som}}{\underset{\text{ovan}}{\iff}} |z-(-2)| = |z-4|$

dvs z ligger på samma avstånd från talen (-2) och 4 i det komplexa talplanet.



Av figuren framgår att $|z-(-2)| = |z-4|$ om och endast om $\mathrm{Re}(z) = 1$

7 b) (Analytisk lösning.)

Låt $z = x + iy$

$\Rightarrow |z+2|^2 = |(x+2)+iy|^2$

$= ((x+2)+iy)\cdot((x+2)-iy)$

$= (x+2)^2 + y^2$

P.s.s. fås

$|z-4| = (x-4)^2 + y^2$

Vi söker reella lösningar (x, y) till

$(x+2)^2 + y^2 = (x-4)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 - 8x + 16$

$\Leftrightarrow 12x = 12 \Leftrightarrow x = 1$

dvs $z = 1 + iy$, y godtyckligt.

7c) $|2z-1| + z = 0$

Eftersom $|2z-1|$ är reellt och ≥ 0 måste en lösning z vara reell och < 0.

$\Rightarrow |2z-1| = 1 - 2z$ (ty $2z-1 < 0$ om $z<0$)

dvs vi söker lösningar $z<0$ till

$1 - 2z + z = 0 \Leftrightarrow 1 - z = 0 \Leftrightarrow z = 1 > 0$

så lösning saknas.

$\boxed{\text{SVAR: a) } x=1 \quad \text{b) } \operatorname{Re} z = 1 \quad \text{c) Lösning saknas}}$

8.

a) FAKTORSATSEN: Om $p(x)$ är ett polynom av gradtal ≥ 1 gäller att:

$$p(a) = 0 \iff (x-a) \text{ är en faktor i } p(x)$$

b) Vi vill lösa $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ $(*)$

Vi ser att $x = 1$ är en lösning

$\underset{\text{FAKTORSATSEN}}{\implies}$ $(x-1)$ delar $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

Polynomdivision ger $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$

så övriga lösningar till $(*)$ ges av

$x^2 + 1 = 0$ $(\iff x = \pm i)$

c) Bevis av FAKTORSATSEN:

Antag först att $(x-a)$ delar $p(x)$, dvs

$p(x) = (x-a)\, q(x)$, q polynom

då är $p(a) = (a-a)\, q(a) = 0$

så $(x-a)$ delar $p(x) \implies p(a) = 0$

Antag nu istället att $p(a) = 0$, vi vill visa att $(x-a)$ då är en faktor i $p(x)$.

Sätt $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots c_1 x + c_0$

Vi observerar först att oavsett om $p(a) = 0$ kan vi skriva

$p(x) = q(x)(x-a) + r$ för något

polynom $q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$

och någon konstant r.

(8)

(forts.) Ty givet p som ovan kan vi bestämma koefficienterna i q samt r så att likhet gäller:

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$$
$$= (b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0)(x-a) + r$$

$$\Rightarrow b_{n-1} = c_n \qquad (\text{Jfr } x^n\text{-termer})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_{n-2} - a b_{n-1} = c_{n-1} & (\text{Jfr } x^{n-1}\text{-termer}) \\ \vdots & \vdots \\ b_0 - a b_1 = c_1 & (\text{Jfr } x\text{-term}) \\ r - a b_0 = c_0 & (\text{Jfr konstanterm}) \end{cases}$$

Först ekvation bestämmer b_{n-1}, varpå b_{n-2} kan bestämmas ur 2:a ekvationen osv.

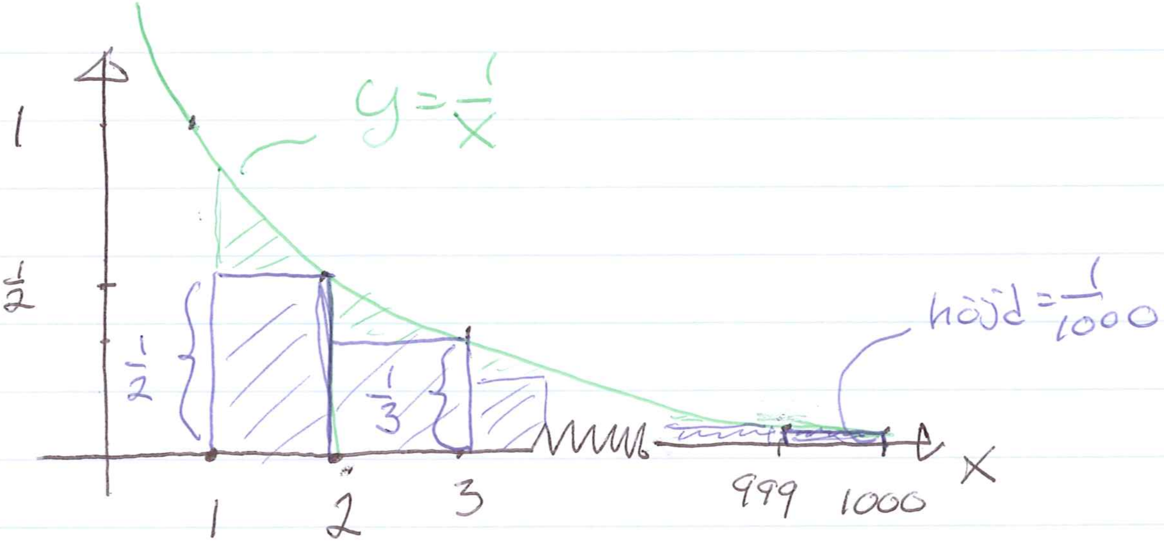
Alltså $p(x) = \underbrace{q(x)}_{\text{polynom}}(x-a) + \underbrace{r}_{\text{konstant}}$

Om nu $p(a) = 0$ fås

$$0 = p(a) = q(a)\underbrace{(a-a)}_{=0} + r \Rightarrow r = 0$$

dvs $p(x) = q(x)(x-a)$. V.S.B.

(9.) Betrakta figuren

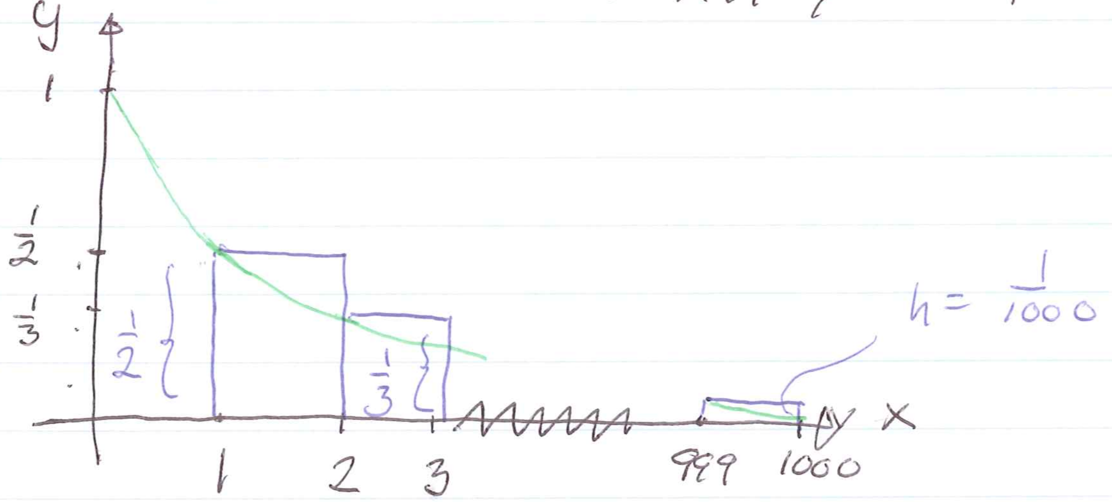


Vi ser att $\sum_{k=2}^{1000} \frac{1}{k}$ = Area av blå staplarna

< Arean mellan kurvan $y=\frac{1}{x}$ och x-axeln

$$= \int_1^{1000} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_1^{1000} = \ln \underbrace{1000}_{10^3} - \underbrace{\ln 1}_{0} = 3\ln 10$$

Betrakta nu figuren där vi byter kurvan $y=\frac{1}{x}$ mot $y=\frac{1}{x+1}$, vi får



9 (forts)

Ur denna figur ser vi

$$\sum_{k=2}^{1000} \frac{1}{k} = \text{Area av blåa staplar}$$

$> \text{Arean under } \frac{1}{x+1} \text{, från } 1 \le x \le 1000$

$$= \int_1^{1000} \frac{1}{x+1}\,dx = \Big[\ln(x+1)\Big]_1^{1000}$$

$$= \ln(1001) - \ln 2 > \ln 1000 - \ln 2$$

$$= \ln 10^3 - \ln 2 = 3\ln 10 - \ln 2$$

Sammantaget har vi visat

$$3\ln 10 - 2 < \sum_{k=2}^{1000} \frac{1}{k} < 3\ln 10$$

V.S.B.