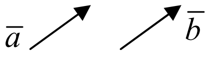
VEKTORALGEBRA FORMLER, NABLA OCH INDEXRÄKNING

$\overline{a}=(a_x,a_y,a_z)$ i kartesiska koordinater

$\overline{b}=(b_x,b_y,b_z)$ i kartesiska koordinater

$\hat{n}=(n_x,n_y,n_z)$ i kartesiska koordinater

$\overline{a}=\overline{b}$ innebär att $a_x=b_x$ cykl., dvs vektorerna $\overline{a}$ och $\overline{b}$ sammanfaller efter parallell förflyttning.



$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ är beloppet (dvs längden) av vektorn $\overline{a}$.

Kartesiska enhetsvektorer:

$\hat{e}_x=(1,0,0)\quad \hat{e}_y=(0,1,0)\quad \hat{e}_z=(0,0,1)$

$\overline{a}=a_x\hat{e}_x+a_y\hat{e}_y+a_z\hat{e}_z$

$\overline{a}+\overline{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$

$\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$

$c\overline{a}=(ca_x,ca_y,ca_z)$

$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$

$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$

$c\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=c\overline{a}+c\overline{b}$

$(s+t)\overline{a}=s\overline{a}+t\overline{a}$

Skalärprodukten:

$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$

$\overline{a}\cdot\overline{b}=|a||b|\cos\alpha$

$\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$

$\left(s\overline{a}\right)\cdot\left(t\overline{b}\right)=st\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)$

$\overline{a}\cdot\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$

$\overline{a}\cdot\overline{a}=\left|\overline{a}\right|^2$

$\overline{a}\cdot\overline{b}=0\Leftrightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$

Kryssprodukten

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\alpha$

Vektorn $\overline{a}\times\overline{b}$ är vinkelrät mot $\overline{a}$ och $\overline{b}$

$\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$

$\left(s\overline{a}\right)\times\left(t\overline{b}\right)=st\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$

$\overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$

$\overline{a}\times\overline{a}=0$

$\hat{e}_x\times\hat{e}_y=\hat{e}_z\quad \hat{e}_y\times\hat{e}_z=\hat{e}_x\quad \hat{e}_z\times\hat{e}_x=\hat{e}_y$

Trippelprodukter: $\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)=\overline{b}\cdot\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)=\overline{c}\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$

$$\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

bac-cab regeln: $\overline{a}\times\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)=\overline{b}\left(\overline{a}\cdot\overline{c}\right)-\overline{c}\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)$

$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\times\overline{c}=\left(\overline{a}\cdot\overline{c}\right)\overline{b}-\left(\overline{b}\cdot\overline{c}\right)\overline{a}$

Derivator i vektoranalysen:

Här är $\overline{A}$ och $\overline{B}$ vektorfält, medan Φ och Ψ är skalärfält, dvs funktioner av läget i rummet $\overline{r}=(x,y,z)$.

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Linjäritet:

$\nabla\left(t\Phi+s\Psi\right)=t\nabla\Phi+s\nabla\Psi$

$\nabla\cdot\left(t\overline{A}+s\overline{B}\right)=t\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)+s\left(\nabla\cdot\overline{B}\right)$

$\nabla\times\left(t\overline{A}+s\overline{B}\right)=t\left(\nabla\times\overline{A}\right)+s\left(\nabla\times\overline{B}\right)$

Produktregler:

$\nabla\left(\Phi\Psi\right)=\Phi\nabla\Psi+\Psi\nabla\Phi$

$\nabla\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)=\overline{A}\times\left(\nabla\times\overline{B}\right)+\overline{B}\times\left(\nabla\times\overline{A}\right)+\left(\overline{A}\cdot\nabla\right)\overline{B}+\left(\overline{B}\cdot\nabla\right)\overline{A}$

$\nabla\cdot\left(\Phi\overline{A}\right)=\Phi\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)+\overline{A}\cdot\left(\nabla\Phi\right)$

$\nabla\cdot\left(\overline{A}\times\overline{B}\right)=\overline{B}\cdot\left(\nabla\times\overline{A}\right)-\overline{A}\cdot\left(\nabla\times\overline{B}\right)$

$\nabla\times\left(\Phi\overline{A}\right)=\Phi\left(\nabla\times\overline{A}\right)-\overline{A}\times\left(\nabla\Phi\right)$

$\nabla\times\left(\overline{A}\times\overline{B}\right)=\left(\overline{B}\cdot\nabla\right)\overline{A}-\left(\overline{A}\cdot\nabla\right)\overline{B}+\overline{A}\left(\nabla\cdot\overline{B}\right)-\overline{B}\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)$

Andraderivator

$\nabla\cdot\left(\nabla\times\overline{A}\right)=0$

$\nabla\times\left(\nabla\cdot\Phi\right)=0$

$\nabla\times\left(\nabla\times\overline{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\overline{A}\right)-\nabla^2\overline{A}$

Indexräkning

$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_ib_i$

$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)_i=\varepsilon_{ijk}a_jb_k$

$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}$ och $\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{jik}$

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & otherwise\end{cases}\quad \text{och}\quad \begin{cases}\delta_{ii}=3\\ \delta_{km}l_{jm}=l_{jk}\end{cases}$$

$\left(\nabla\phi\right)_i=\phi_{,i}\qquad \nabla\cdot\overline{A}=A_{i,i}\qquad \left(\nabla\times\overline{A}\right)_i=\varepsilon_{ijk}A_{k,j}$

$$\text{Point source: }\begin{cases}\overline{A}(\overline{r})=\dfrac{s}{r^2}\hat{e}_r\ \text{ eller }\ \overline{A}(\overline{r})=s\dfrac{\overline{r}-\overline{r}_0}{\left|\overline{r}-\overline{r}_0\right|^3}\ \text{ med källen på }\overline{r}_0\\ \overline{A}=grad\phi\quad\Rightarrow\quad \phi=-\dfrac{s}{r}+c\\ \displaystyle\oiint_S\frac{s}{r^2}\hat{e}_r\cdot d\overline{S}=\begin{cases}0 & \text{om källen yttre punkt i V}\\ 4\pi s & \text{om källen inre punkt i V}\end{cases}\end{cases}$$

Dipole source: $\phi=\dfrac{\overline{p}\cdot\overline{r}}{r^3}$ och $\overline{E}\left(\overline{r}\right)=-\dfrac{\overline{p}}{r^3}+\dfrac{3\left(\overline{p}\cdot\overline{r}\right)\overline{r}}{r^5}$

Vortex: $\displaystyle\oint_L\frac{k}{\rho}\hat{e}_\varphi\cdot d\overline{r}=2\pi kN$