

# Spektrala Transformer

Tidsdiskreta signaler,  
kvantisering & sampling

# Tidsdiskreta signaler

Tidskontinuerlig signal

$$\text{Ex: } x(t) = \sin(\omega t)$$

$t$  är ett reellt tal

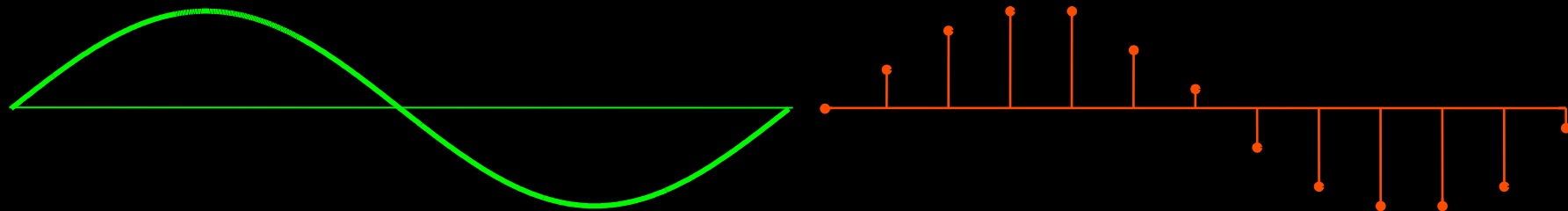
$\omega$  har enheten rad/s

Tidsdiskret signal

$$\text{Ex: } x(n) = \sin(\omega n)$$

$n$  är ett heltal

$\omega$  har enheten rad/  
sampel

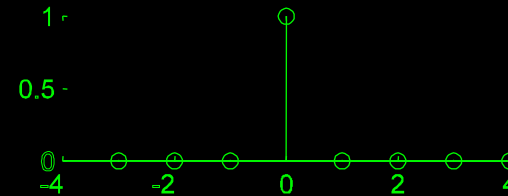


# Tidsdiskreta signaler, forts.

Några speciella funktioner

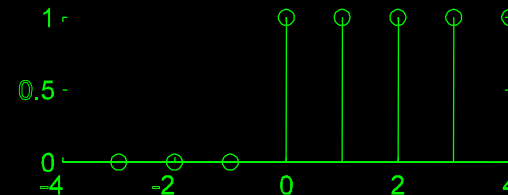
Deltafunktion, impuls

$\delta(n)$



Stegfunktion

$u(n)$



# Digitalisering

- En dator kan inte representera analoga signaler
- För att kunna behandla verkliga signaler i en dator måste de *digitaliseras* (*digitize*)
- Denna process påverkar signalens informationsinnehåll på flera sätt
- Vi behöver kunna beskriva och modellera *hur* signalen påverkas

# Digitalisering (forts.)

- Digitaliseringen påverkar signalen på två sätt: genom *sampling* och *kvantisering*



Analog  
signal



# Kvantisering

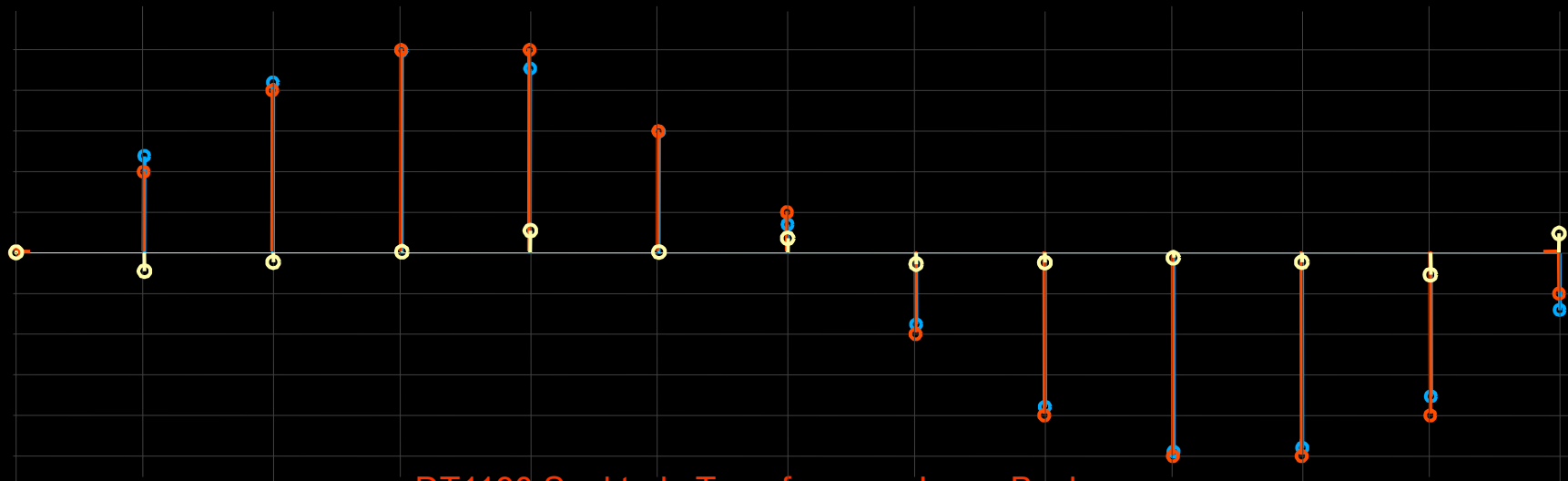
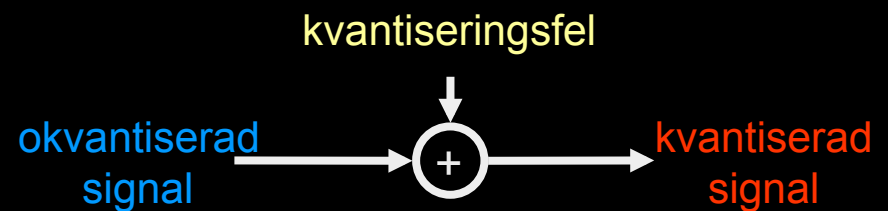
- För att kunna representera ett analogt värde, t.ex. en spänning, i datorn måste det beskrivas med ett begränsat antal ( $B$ ) bitar
- Vi delar in intervallet i  $2^B$  lika steg
- Värdet representeras av ett heltal mellan  $-2^{B-1}$  och  $2^{B-1} - 1$

Exempel:  $B = 8$  ger  $[-128, 127]$



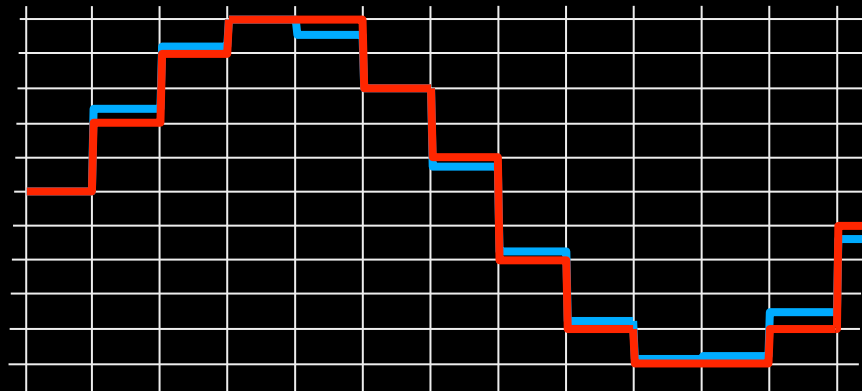
# Kvantiseringsfel

- Kvantisering introducerar ett fel som är okorrelerat med insignalen
- Kan ses som additivt brus



# Kvantiseringsfel (forts.)

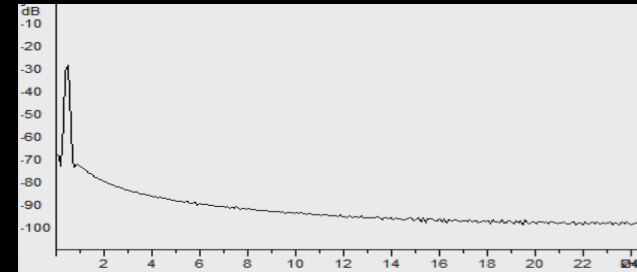
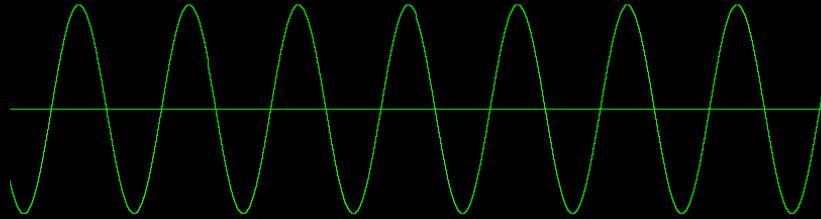
- Likformigt fördelat på intervallet  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- Medelfelet (RMS) =  $\frac{1}{\sqrt{12}}$  = 0.2887



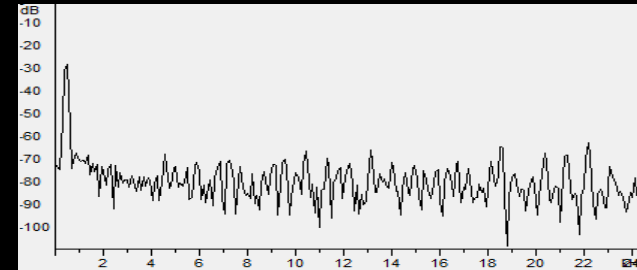
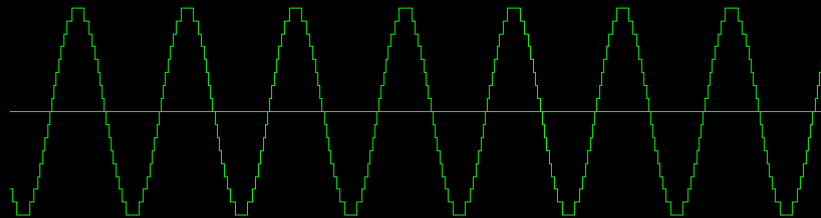


# Kvantisering - exempel

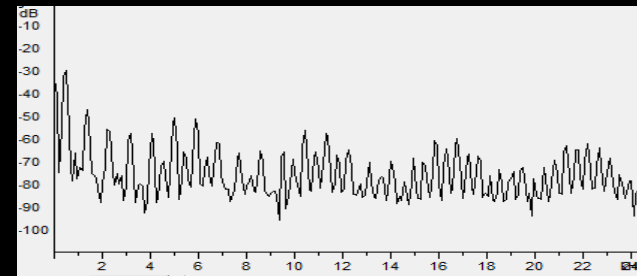
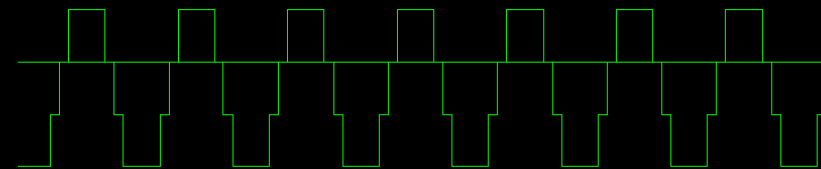
8 bitar



4 bitar



2 bitar



# Signal/brus-förhållande (SNR)

- Absoluta felnivån är ofta ointressant
- Kvoten mellan signalens och brusets effekter kallas *SNR* (*Signal-to-Noise-Ratio*)
- *Effekt*  $\sim$  *amplitud*<sup>2</sup>
- $P_{signal} \sim (2^{B-1})^2 = 2^{2(B-1)} = 2^{2B}/4$
- $P_{brus} \sim 1/12$
- $SNR = 3 \cdot 2^{2B}$
- Uttrycks ofta i dB

# Decibel (dB)

- Logaritmisk skala, motsvarar hur örat uppfattar ljudnivå
- Uttrycker *förhållandet* mellan två nivåer  
för amplituder:  $20 \log_{10}(A_2/A_1)$   
för effekter:  $10 \log_{10}(P_2/P_1)$

Exempel: En dubblering av amplituden

$$20 \log_{10}(2) = 20 \cdot 0.3 = 6\text{dB}$$

*eller*

$$10 \log_{10}(2^2) = 10 \cdot 0.6 = 6\text{dB}$$

# SNR, dB och dynamiskt omfång

$$\begin{aligned} SNR_{dB} &= 10\log_{10}(3 \cdot 2^{2B}) \\ &= 4.77 + B \cdot 6.02 \end{aligned}$$

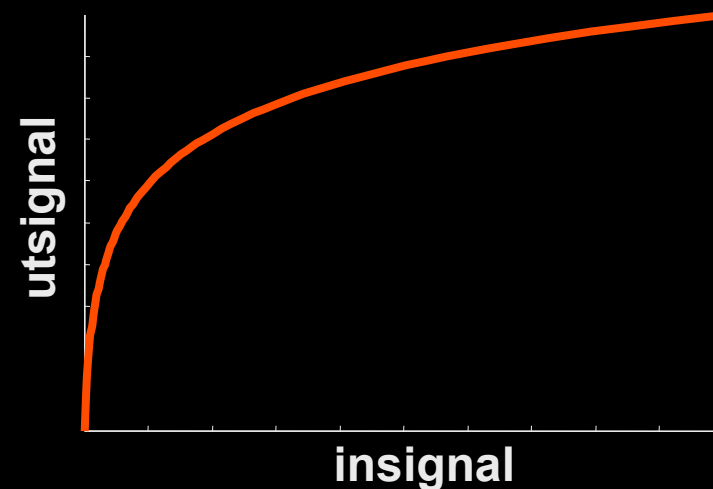
Varje bit ger ca 6 dB

<i>B</i>	<i>SNR</i>	<i>dB SPL</i>	<i>Exempel</i>
8	52.9 dB	140	Jetplan
16	101.1 dB	120	Rockkonsert
24	149.3 dB	100	Skrik
		80	Trafikerad gata
		70	Normal konversation
		50	Tyst konversation
		30	Viskning
		20	Landsbygdsnatt

# Olinjär kvantisering

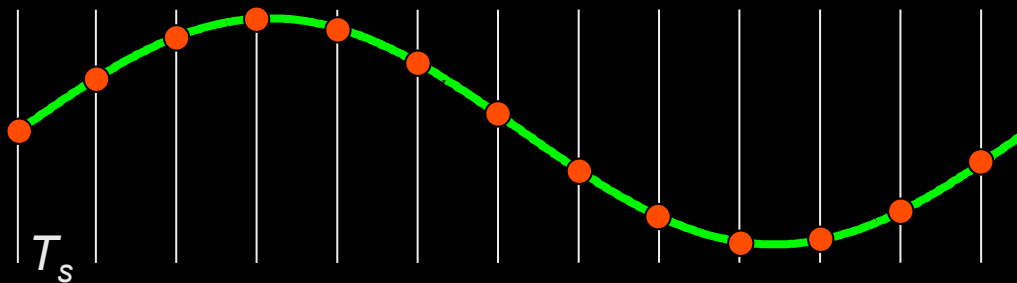
- Trick för att öka det dynamiska omfånget utan att öka antalet bitar
- Små kvantiseringssteg vid små signalnivåer, stora steg vid höga nivåer
- Används i telenätet

*exempel:  $\mu$ -law*



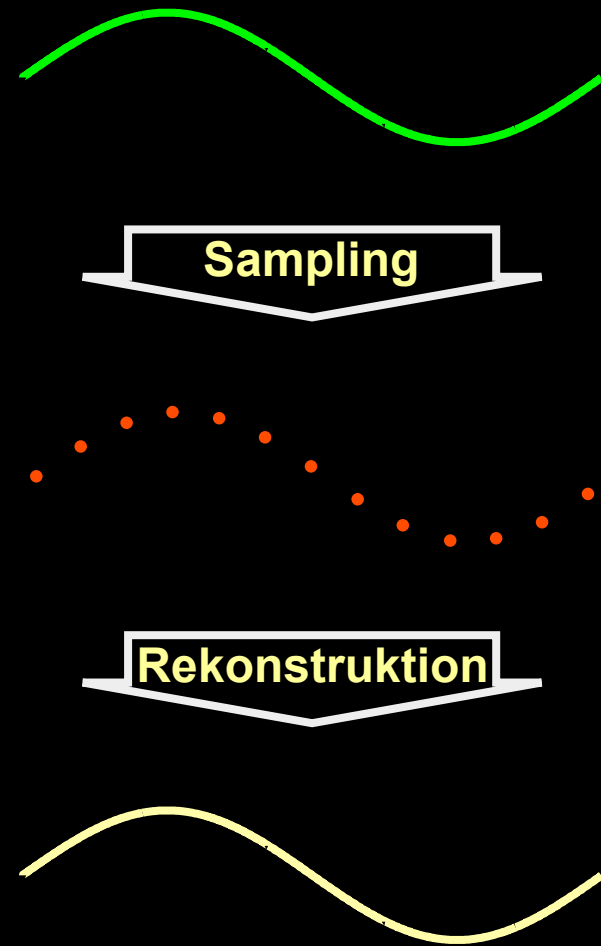
# Sampling

- Ta ett värde, ett sampel, av signalen vid jämna tidsintervall  $T_s$
- $f_s = 1/T_s$  kallas samplingsfrekvensen eller samplingshastigheten (sampling frequency, sampling rate)
- Vad är ett bra värde på  $f_s$  ?

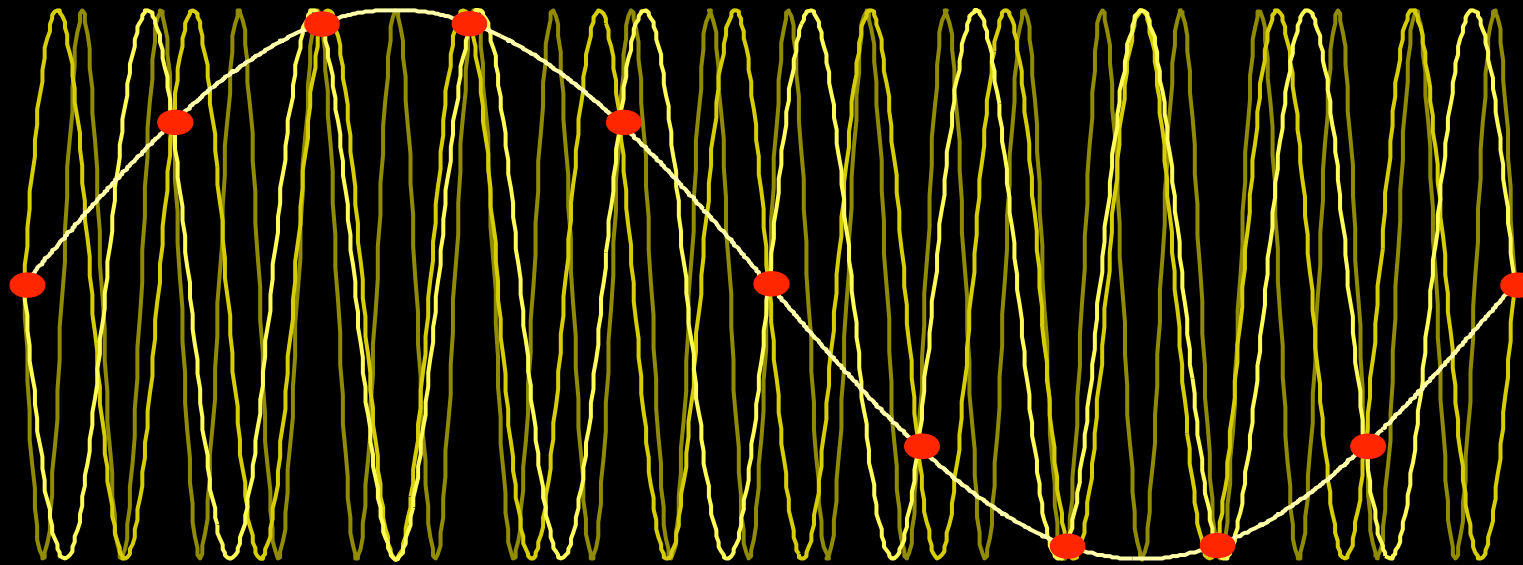


# Kriterium för "korrekt" sampling

Att kunna exakt  
rekonstruera den  
ursprungliga  
insignalen ur den  
samplade signalen



# Sampling av sinusvåg



- Samplar vi *en* sinusvåg, så finns det ett *oändligt antal* sinusvågor som ger *exakt samma* sampelpunkter!
- Fenomenet kallas *aliasing* eller *vikning*



# Samplingsteoremet

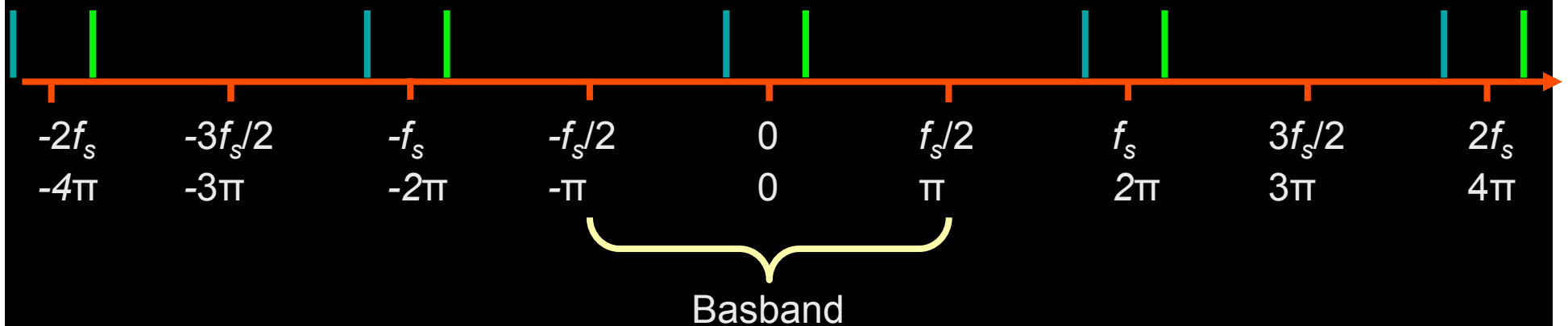
En signal kan samplas korrekt om den inte innehåller frekvenser över halva samplingsfrekvensen

Kallas även *Nyquists samplingsteorem*

$f_s/2$  kallas ofta *Nyquistfrekvensen*

# Aliasing / Vikning

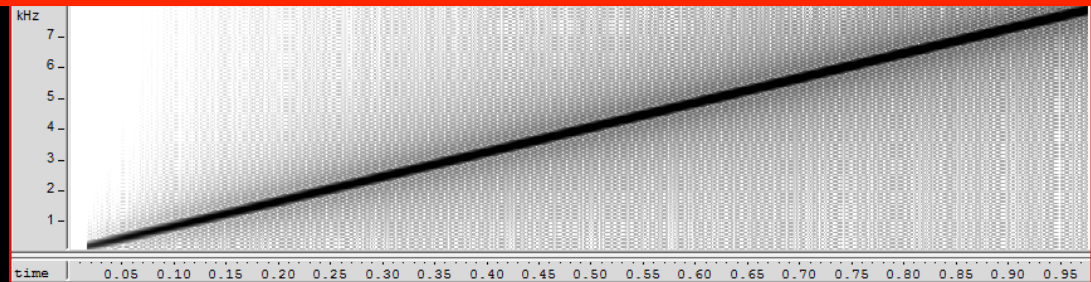
- Frekvensspektrum speglas i alla multiplar av nykvistfrekvensen  $f_s/2$
- Frekvensområdet  $[-f_s/2, f_s/2]$  eller  $[\pi, -\pi]$  kallas basbandet



# Vikning - exempel

Sinussvep 0 - 8000 Hz  
 $fs/2$

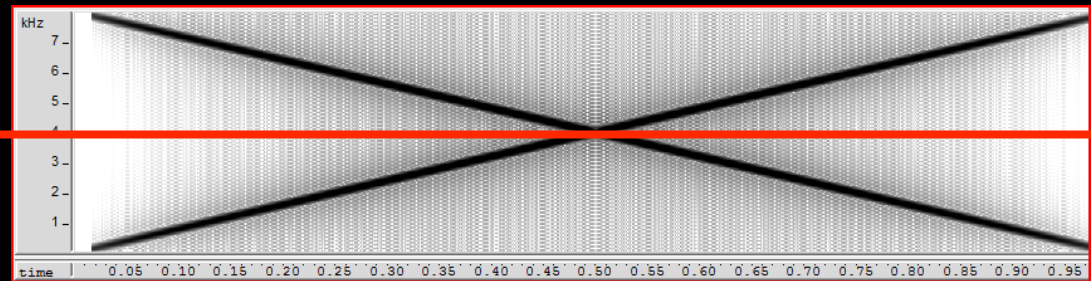
$fs = 16000$  Hz



$fs = 8000$  Hz



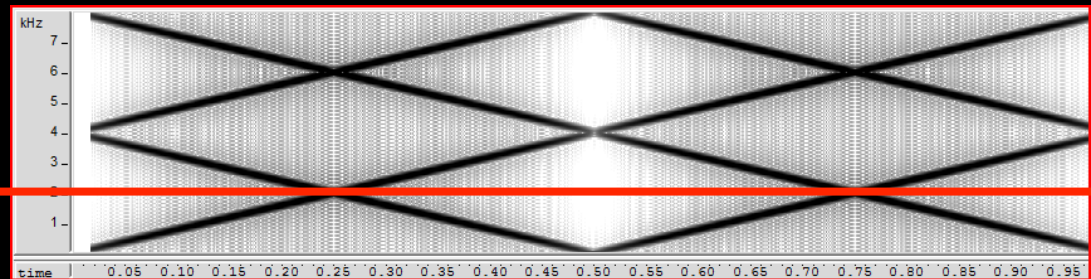
$fs/2$



$fs = 4000$  Hz



$fs/2$



# Att undvika aliasing

- Insignalen måste bandbegränsas – alla frekvenskomponenter  $> f_s/2$  måste bort
- Detta görs med ett lågpasfilter
- Kallas för anti-vikningsfilter eller anti-aliasing filter
- Filtreringen görs typiskt med analog elektronik
- Alternativt så samplar man med "för hög" frekvens och reducerar samplingsfrekvensen med ett digitalt filter, som kan göras mycket effektivt

# Att byta samplingsfrekvens

- Nersampling (minska  $f_s$  med faktor N)
  - Lågpasfiltrering vid nya  $f_s/2$
  - Plocka ut vart  $N$ :te sampel
- Uppsampling (öka  $f_s$  med faktor M)
  - Skjut in  $M-1$  nollor mellan varje sampel
  - Lågpasfiltrering vid nya  $f_s/2$
- Omsampling (ändra  $f_s$  med faktor  $M/N$ )
  - Sampla först upp, sedan ned.

# Sammanfattning

- Sampling och kvantisering introducerar fel av olika karaktär
  - Kvantisering adderar brus till signalen
  - Inkorrekt sampling kan introducera "falska" frekvenser
- Det är signalens dynamiska omfång som avgör lämplig kvantiseringsgrad
- Signalens frekvensinnehåll bestämmer samplingsfrekvens