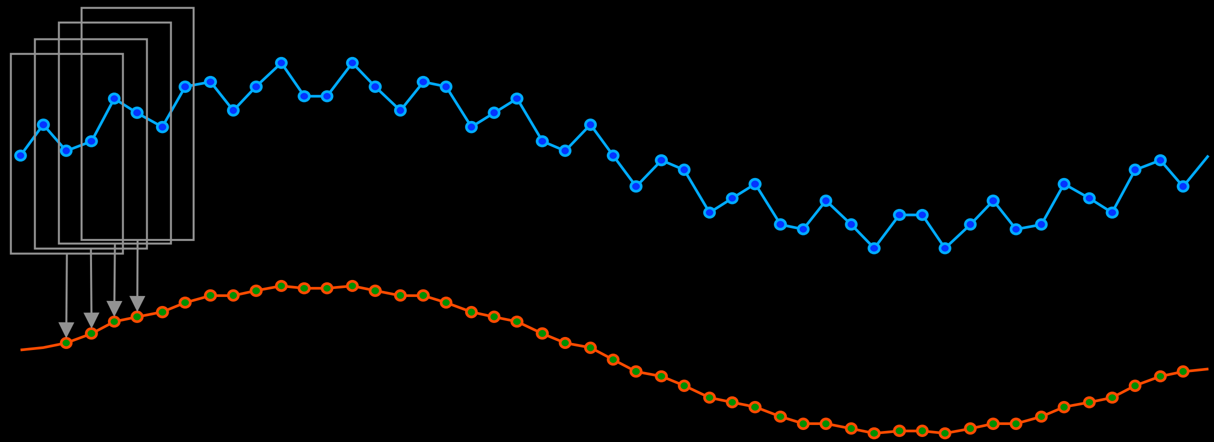
# Spektrala Transformer

## Linjära system och filter

# Ett enkelt filter



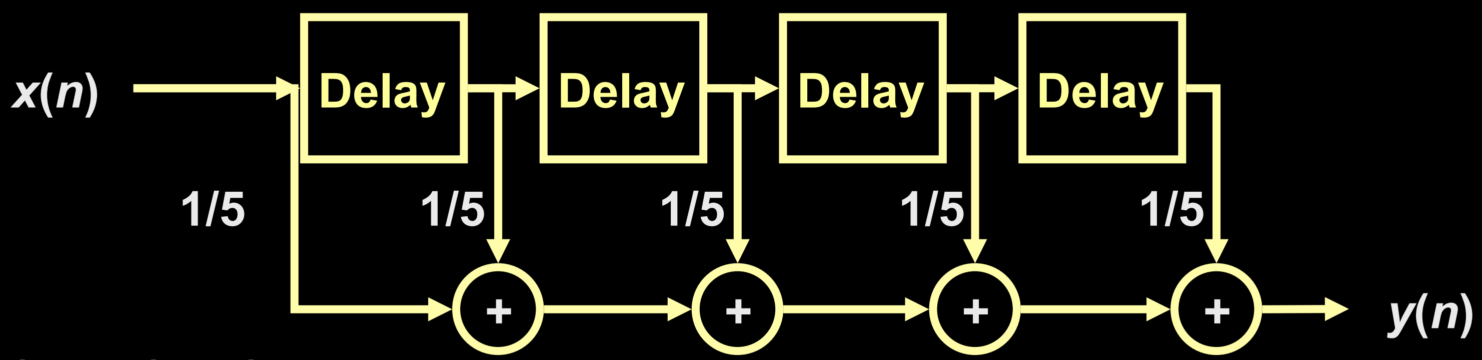
Exempel

- Signal med högfrekvent störning
- Skapa ny signal genom att medelvärdesbilda över 5 punkter i taget
- Kallas moving-average / rullande medlevärde

# Enkelt filter (forts.)

Hur kan vi beskriva filtret?

*Grafiskt:*




*Med en ekvation:*

$y(n) = \quad x(n)/5 + x(n-1)/5 + x(n-2)/5 + x(n-3)/5 + x(n-4)/5$

*Allmänt:*

$y(n) = \quad a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + \ldots + a_kx(n-k)$

# Linjärt system

Filterekvationen

$$y(n) = \quad a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + \ldots + a_kx(n-N)$$

beskriver ett *linjärt system*

$$x_1(n) \longrightarrow \boxed{\textbf{Linjärt system}} \longrightarrow y_1(n)$$

$$x_2(n) \longrightarrow \boxed{\textbf{Linjärt system}} \longrightarrow y_2(n)$$

$$x_1(n) + x_2(n) \longrightarrow \boxed{\textbf{Linjärt system}} \longrightarrow y_1(n) + y_2(n)$$

$$c\,x_1(n) \longrightarrow \boxed{\textbf{Linjärt system}} \longrightarrow c\,y_1(n)$$

# Tidsinvarians

Systemet

$$y(n) = \quad a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \ldots + a_k x(n-N)$$

är dessutom *tidsinvariant*

$x_1(n) \rightarrow$ Tidsinvariant system $\rightarrow y_1(n)$

$x_2(n) = x_1(n+k) \rightarrow$ Tidsinvariant system $\rightarrow y_2(n) = y_1(n+k)$

För ett linjärt tidsinvariant system (LTI system) gäller

$x(n) \rightarrow$ Tidsinvariant system $\rightarrow$ Tidsinvariant system $\rightarrow y(n)$

$x(n) \rightarrow$ Tidsinvariant system $\rightarrow$ Tidsinvariant system $\rightarrow y(n)$

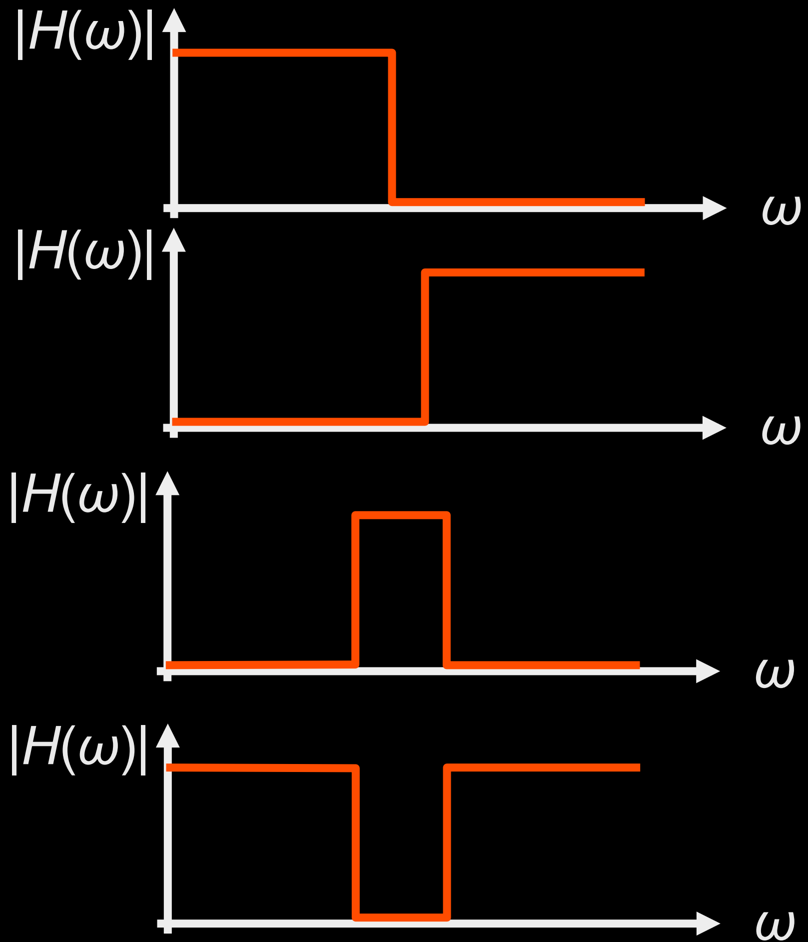
# Filter - terminologi

Lågpass (low pass)

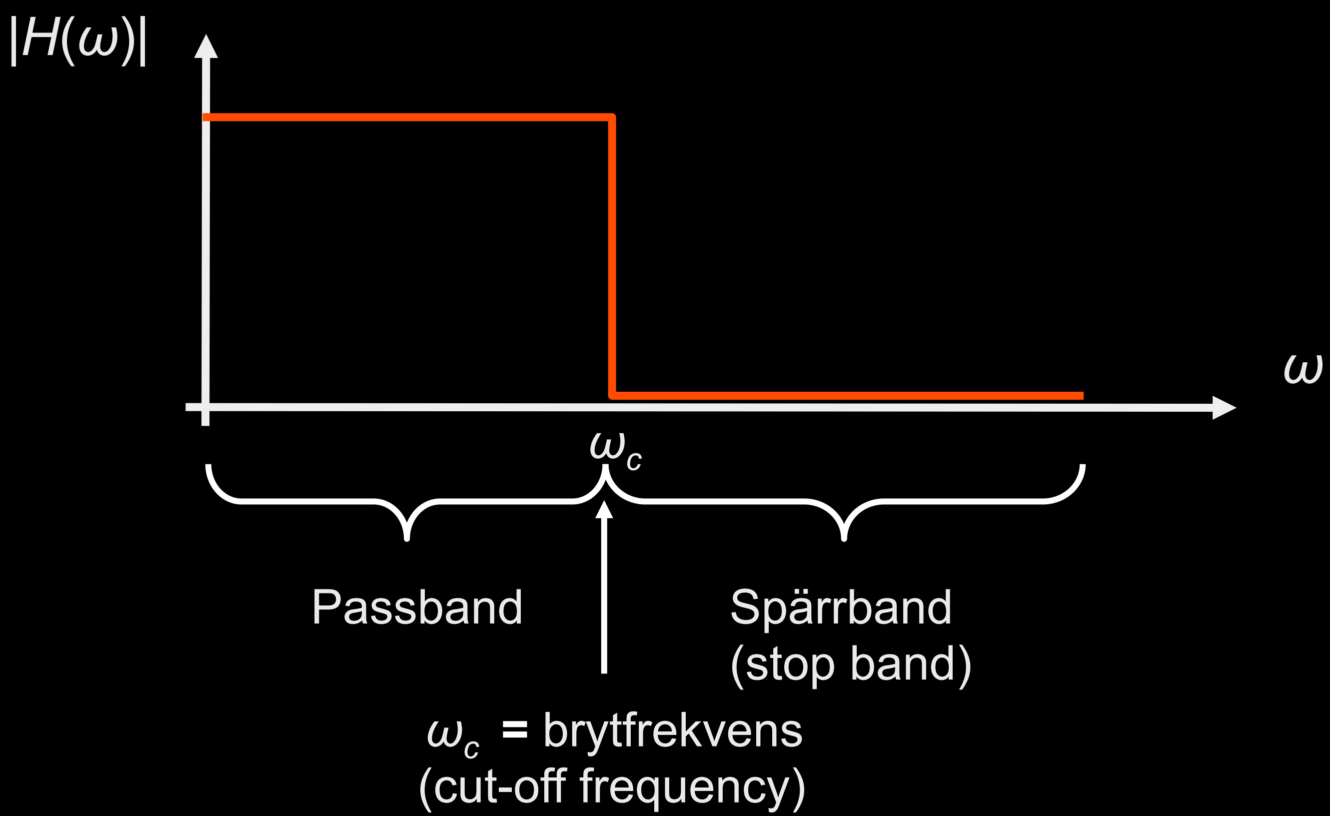
Högpass (high pass)

Bandpass (band pass)

Bandspärr (band stop)



# Filter - terminologi



# Fördröjningsoperatorn $z^{-k}$

Genom att sätta $z = e^{j\omega}$ kan vi skriva filterekvationen

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \ldots + a_k x(n-k)$$

som

$$y(n) = x(n)\,[\,a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_k z^{-k}\,]$$

då insignalen är en phasor $x(n) = e^{j\omega n}$

Multiplikation med $z^{-k}$ fördröjer signalen $k$ sampel

# Överföringsfunktionen $H(z)$

$$\underbrace{Y(z)}_{\text{Transform av } y(n)} = \underbrace{X(z)}_{\text{Transform av } x(n)} \underbrace{[\, a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_k z^{-k} \,]}_{H(z)}$$

$H(z)$ kallas filtrets överföringsfunktion

(transfer function)

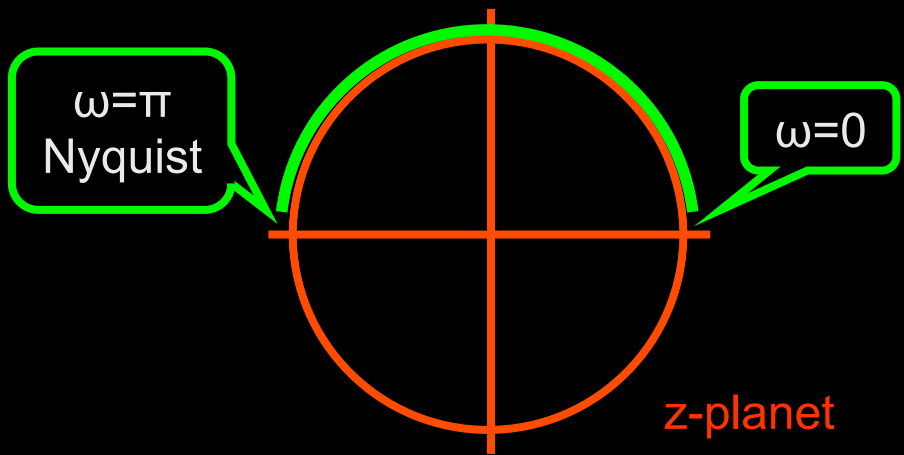
Den berättar allt det finns att veta om filtret

# Frekvensgång

- Hur ett filter släpper igenom signaler av olika frekvenser beskrivs av $H(\omega)$
- $|H(\omega)|$ kallas frekvensgången (magnitude response)
- $\arg\{H(\omega)\}$ kallas fasgången (phase response)

# z-planet

- H(z) är en *komplexvärd* funktion av en komplex variabel
- Övre halvan av enhetscirkeln är frekvensaxeln
- Frekvensgången fås genom att evaluera $|H(z)|$ över enhetscirkeln: $|H(\omega)| = |H(e^{j\omega})|$



# z-planet (forts.)

Vi kan få en bild av $H(z)$ genom att plotta dess *nollställen* $H(z) = 0$

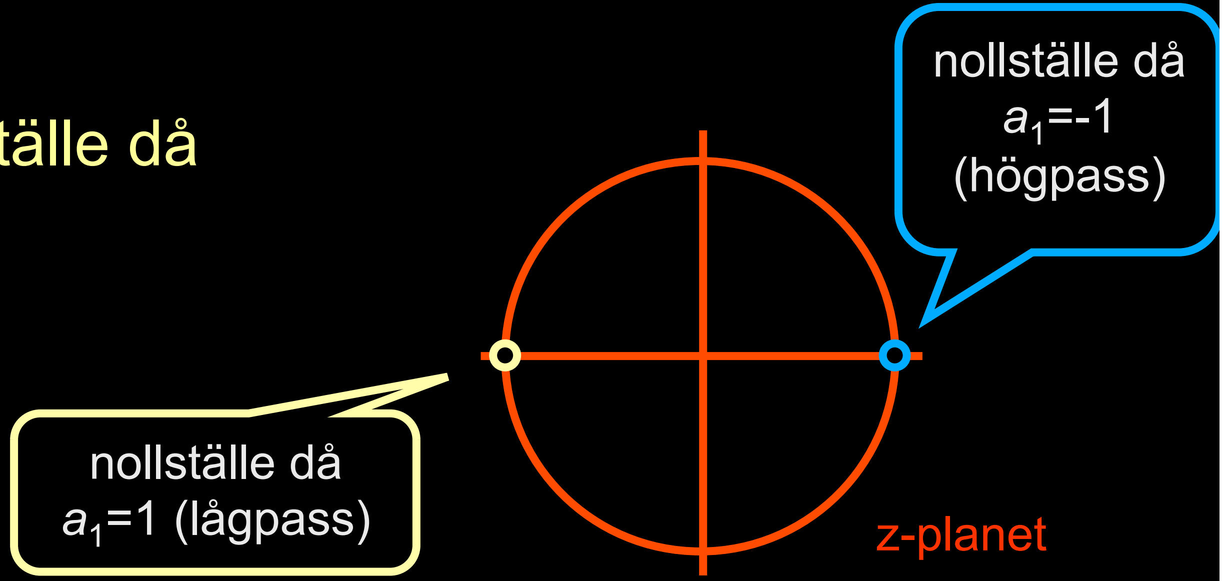
exempel:

$y(n) = x(n) + a_1 x(n-1)$

$H(z) = 1 + a_1 z^{-1}$

$H(z) = 0$ ger ett nollställe då

$z = -a_1$



# z-planet (forts.)

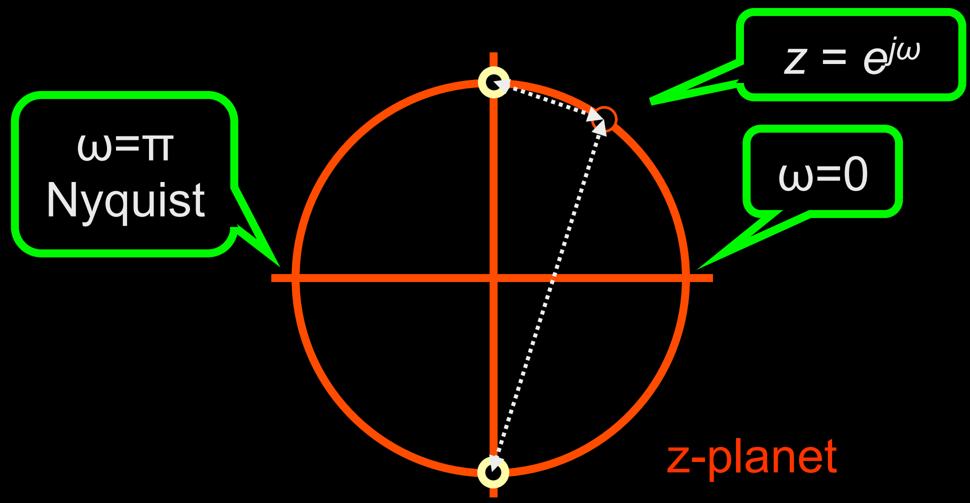
exempel:

$y(n) = x(n) + x(n-2)$

$H(z) = 1 + z^{-2}$

$H(z) = 0$ ger $z = \pm j$

$|H(\omega)| = |e^{-j\omega} - j|\,|e^{-j\omega} + j|$



# Impulssvar (impulse response)

- Filtrets impulssvar $h(n)$ är filtrets utsignal då insignalen är en *impuls* $\delta(n)$
- Filter utan återkoppling har ändligt impulssvar (FIR - Finite Impulse Response)
- För ett sådant filter är $h(n) = a_n$

# Impulssvar och överföringsfunktion

- $H(z)$ eller $h(n)$ kan användas för att definiera ett filter
- 1-till-1-förhållande mellan impulssvar och överföringsfunktion
- $H(z)$ är $h(n)$ transformerat till frekvensdomänen
- I det generella fallet är $h(n)$ definierad för $n = (-\infty,\infty)$

# Faltning (convolution)

- När en signal *x*(*n*) filtreras genom ett filter med inpulssvaret *h*(*n*) så är utsignalen *y*(*n*) en *faltning* av *x*(*n*) och *h*(*n*)
- Betecknas *y*(*n*) = *x*(*n*)***h*(*n*)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

- När två signaler *faltas* i tidsdomänen, multipliceras de i frekvensdomänen

# Fasgång

- Fasgången $\theta(\omega) = \arg(H(\omega))$ beskriver hur ett filter ändrar fasvinkeln för en phasor $e^{j\omega n}$
- Ibland önskar man linjär fasgång dvs.

  $\theta(\omega) \sim \omega$
- Det innebär att alla frekvenser får samma fördröjning
- Symmetriskt impulssvar ger linjär fasgång

# Filterdesign – att ta fram koefficienter

- Hur bestämmer man filterkoefficienterna ett önskat filter?
- Filterdesignproblemet kan ses som ett optimeringsproblem: koefficienterna justeras tills H(z) matchar det man vill ha
- Finns många bra verktyg, t.ex. i matlab

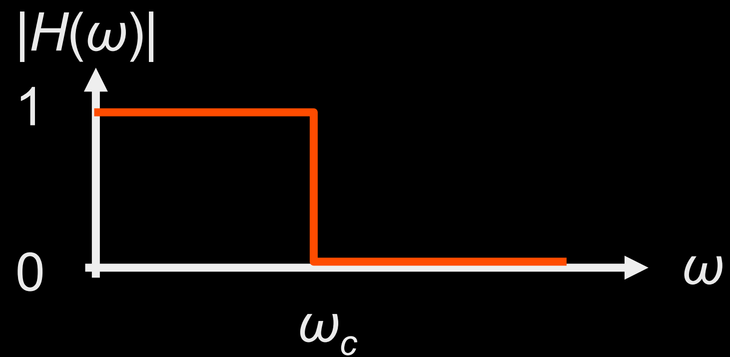
# Idealt lågpassfilter

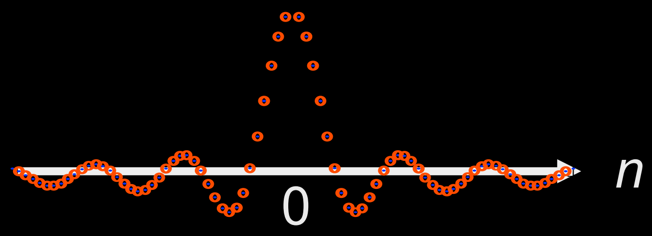
Eftersom H(z) kan transformeras till h(n) kan man designa önskad överföringsfunktion i z-planet och sedan beräkna vilket impulssvar det mostsvarar

ett *idealt* lågpassfilter

har impulssvaret

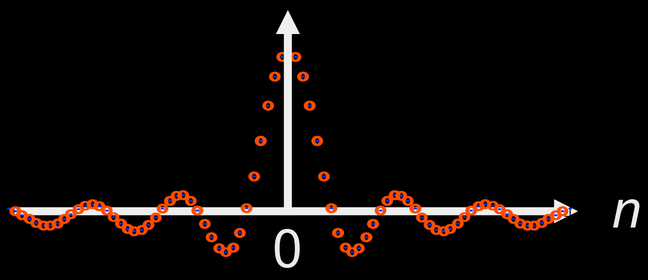
$$h(n) = \frac{\sin(\omega_c k)}{k\pi}$$

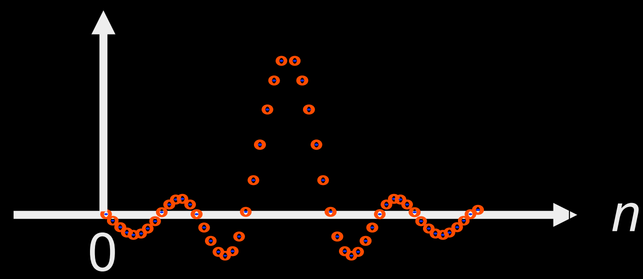


# Praktiskt lågpassfilter

- I praktiken måste dock h(n)
  - trunkeras till *M* sampel
  - förskjutas *M*/2 för att kunna implementeras med fördröjningar



# Sammanfattning

- Ett filter fungerar genom att kombinera fördröjda versioner av insignalen
- Ett linjärt tidsinvariant system (LTI-system) kan analyseras med hjälp av fasvektorer
- Ett filter bestäms entydigt av sin överföringsfunktion $H(z)$
- Ett filter bestäms entydigt av sitt impulssvar $h(n)$

# Sammanfattning (forts.)

- Ett filter utan återkoppling har ett ändligt impulssvar som är lika med filterkoefficienterna
- Utsignalen y(n) är faltningen mellan insignalen x(n) och impulssvaret h(n)

  $y(n)=x(n)*h(n)$
- Faltning i tidsdomänen motsvaras av multiplikation i frekvensdomänen