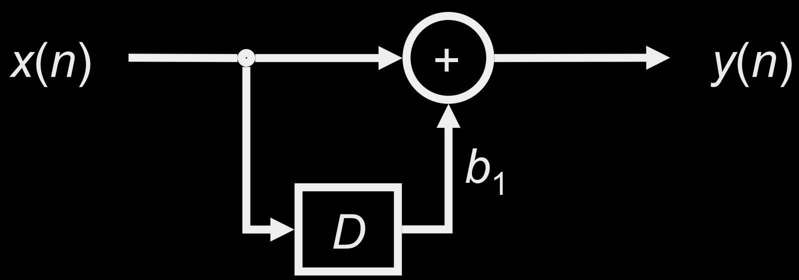
Spektrala Transformer

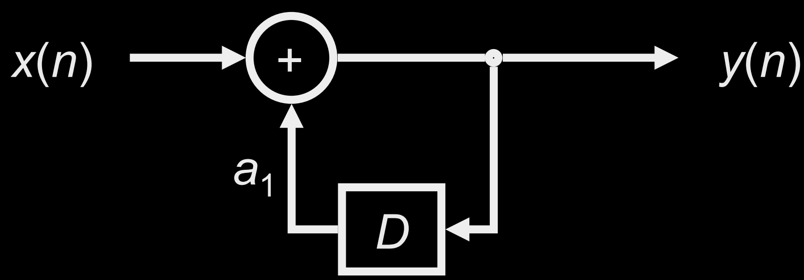
Filter med återkoppling

Filter med återkoppling

Enkelt filter utan återkoppling



Enkelt filter med återkoppling



$$y(n) = x(n) + b_1 x(n-1)$$

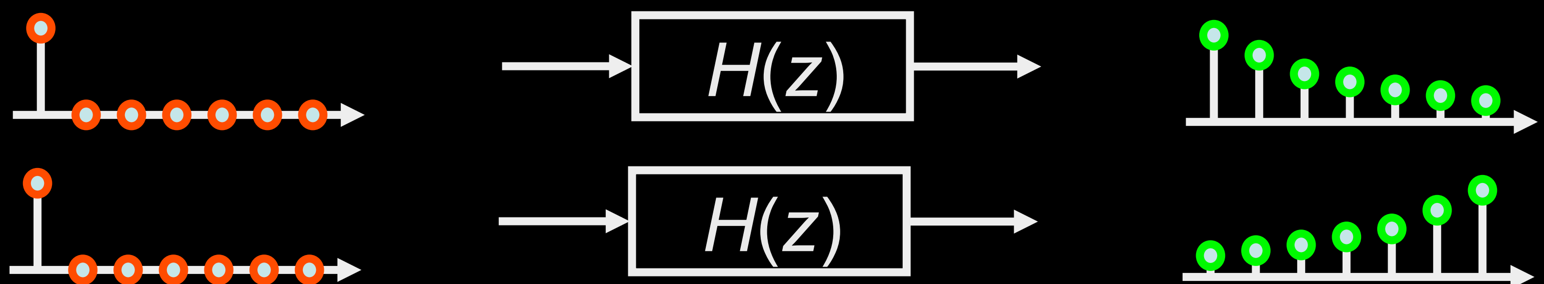
$$y(n) = x(n) + a_1 y(n-1)$$

$$H(z) = 1 + b_1 z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}$$

Filter med återkoppling - impulssvar

- Impulssvaret från ett återkopplat filter kan ha oändlig utsträckning
- Kallas även *IIR-filter* (IIR = Infinite Impulse Response)
- Kan vara *instabilt*



Poler

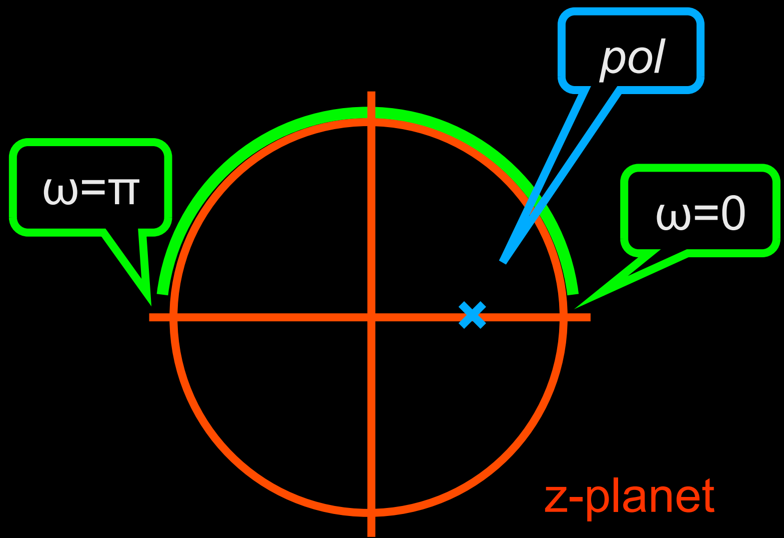
- Överföringsfunktionen för ett filter med återkoppling går mot oändligheten vid vissa *z*
- Dessa punkter kallas filtrets *poler*
- Poler plottas som kryss i z-planet

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}$$

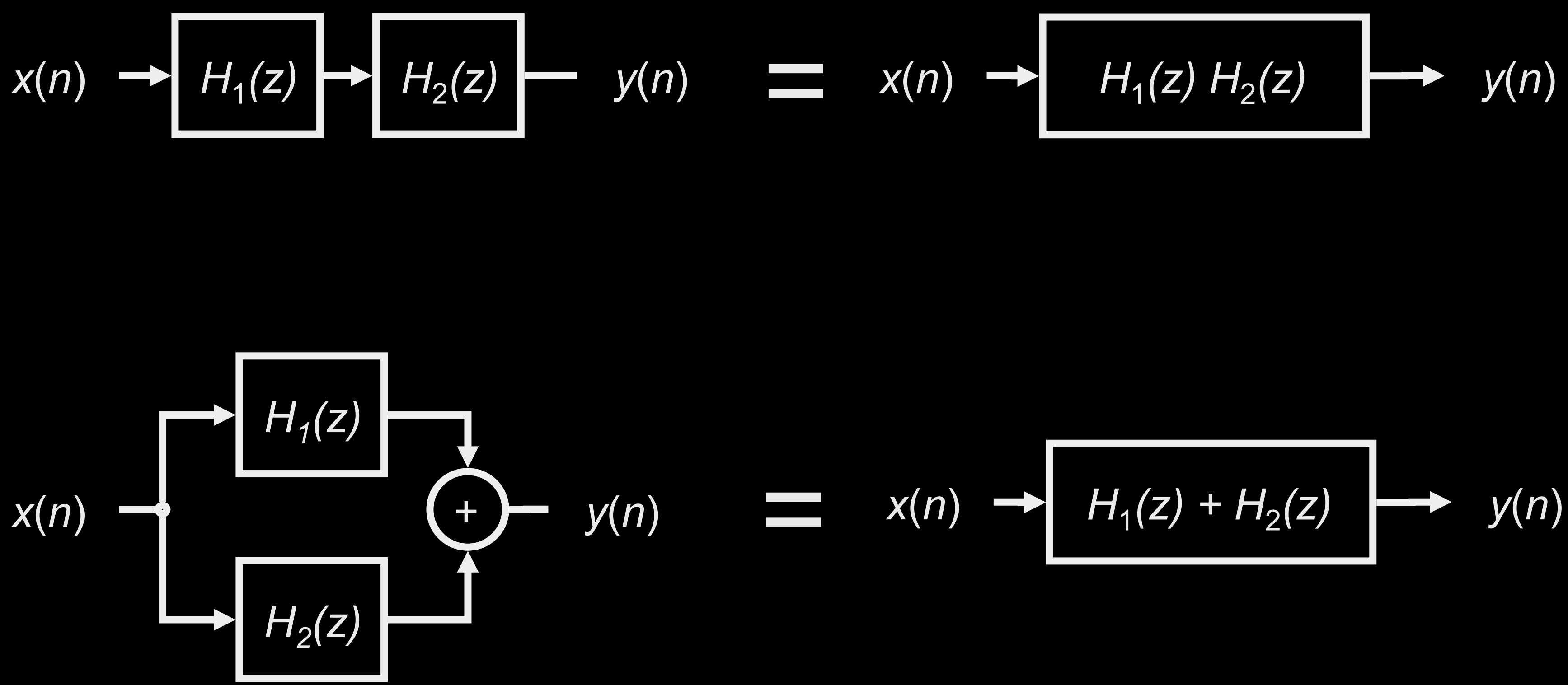
Exempel: Filtret

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5 z^{-1}}$$

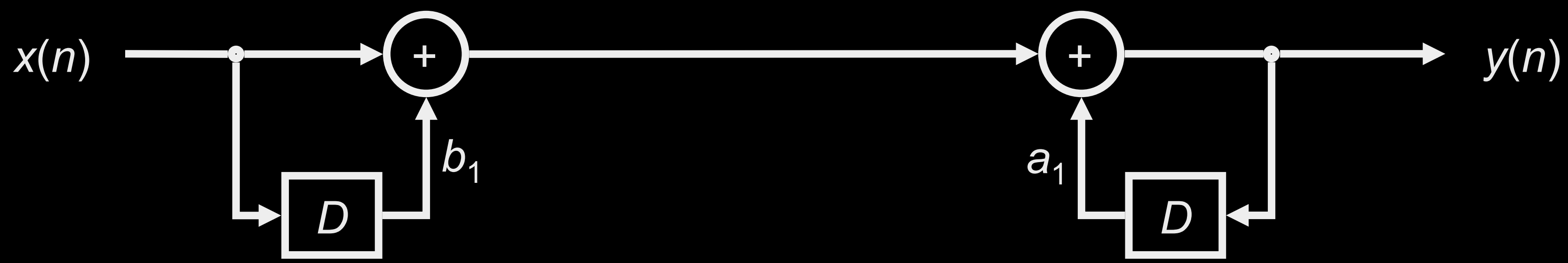
har *en* pol *z* = 0.5



Kaskad och parallellkoppling



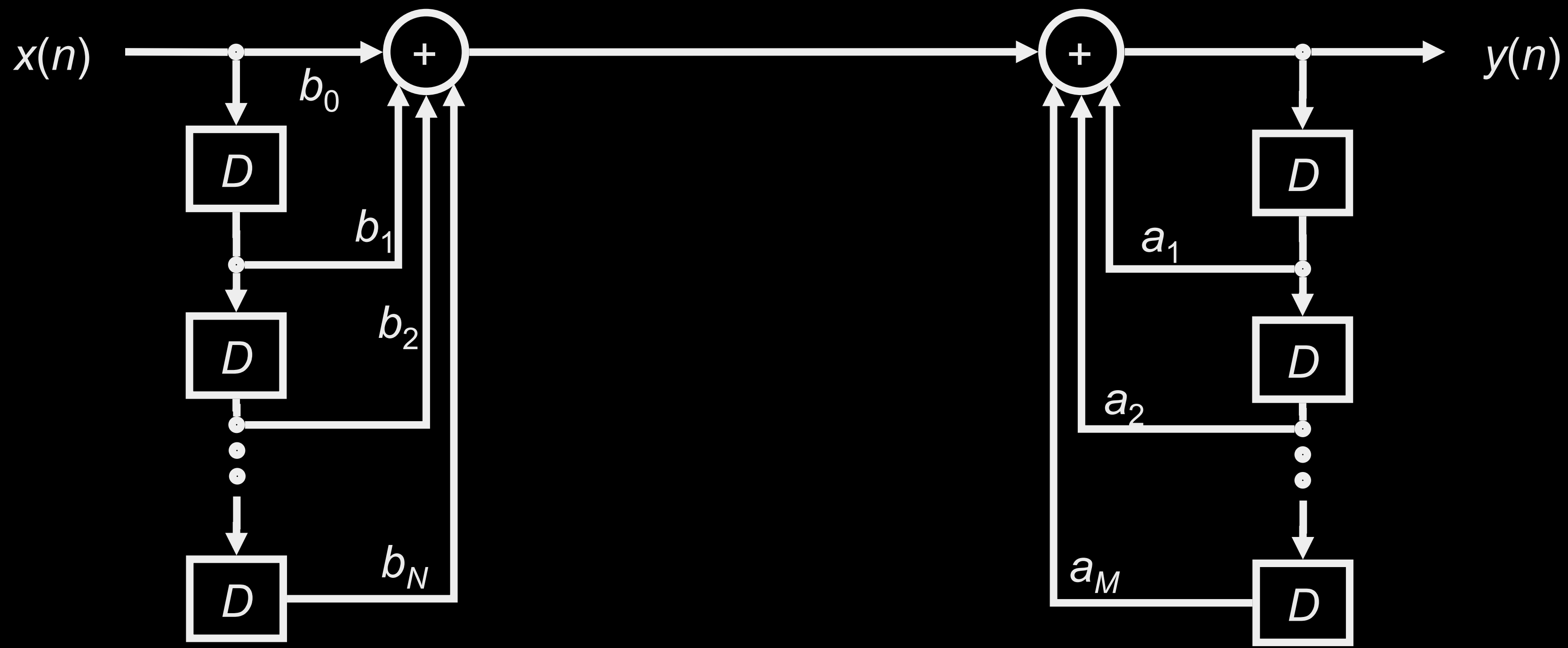
Kaskadkoppling - exempel



$$H_1(z) = 1 + b_1 z^{-1} \qquad H_2(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}$$

$$H_{tot}(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

Allmänt filter



$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_N z^{-N}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \ldots - a_M z^{-M}}$$

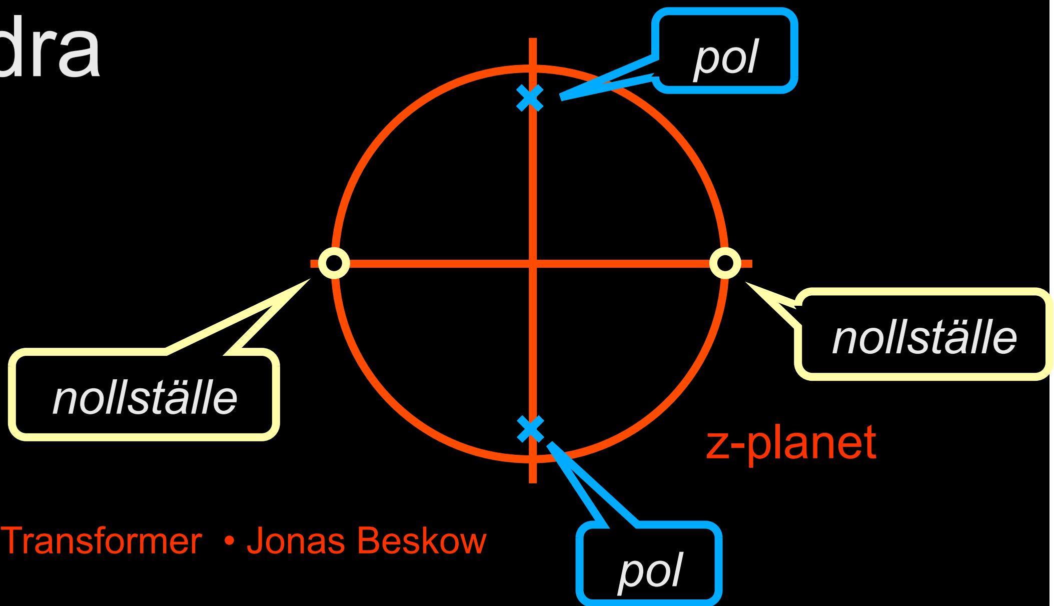
Poler och nollställen

- Ett filter kan beskrivas i termer av poler och nollställen (poles and zeros)
- Plottas i z-planet som kryss och ringar
- Om en pol och ett nollsälle sammanfaller, så tar de ut varandra

Exempel: Filtret

$$H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z-.9j)(z+.9j)}$$

har nollställen i $z = \pm 1$
och poler i $z = \pm 0.9j$



Stabilitet

Ett återkopplat filter är stabilt *omm* alla poler p_i ligger innanför enhetscirkeln, dvs

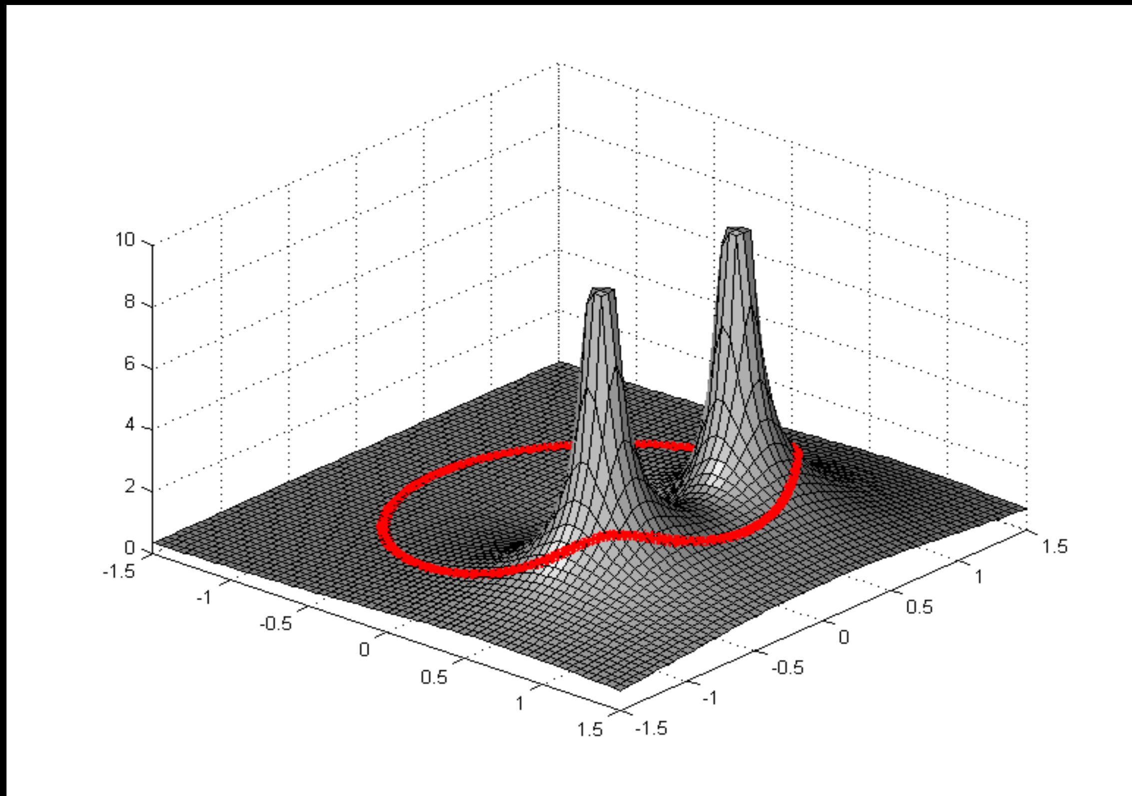
$$|p_i| < 1 \text{ för alla } i$$

Resonans och bandbredd

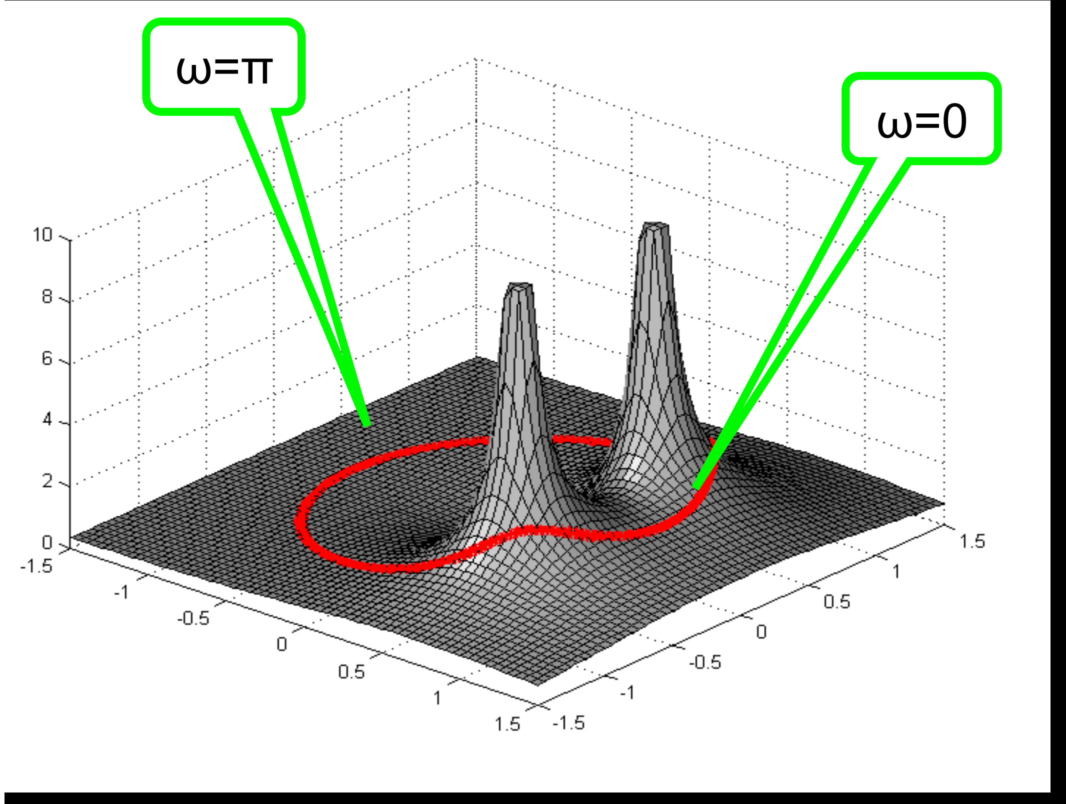
- En pol på radien *R* ger upphov till en topp i frekvensgången, en sk. *resonans*
- Resonansens *bandbredd B* är ett mått på dess spetsighet
- Bandbredden är avståndet mellan den höga och låga frekvens där amplituden sjunkit med 3 dB från resonanstoppen
- Om $R \approx 1$ gäller att $R \approx 1 - B/2$

Tvåpolsresonatorn

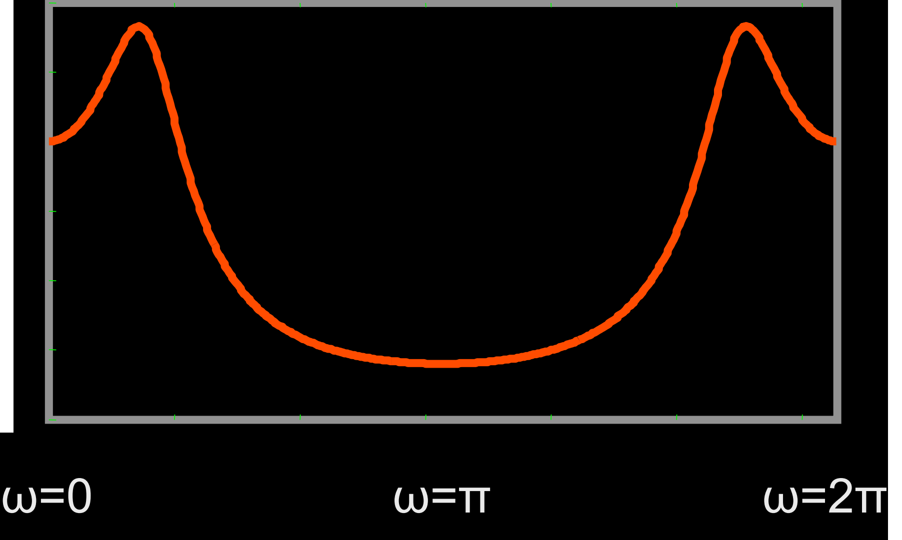
$$H(z) = \frac{z^2}{(z - R\cdot e^{j\theta})(z - R\cdot e^{-j\theta})}$$



Tvåpolsresonatorn (forts)

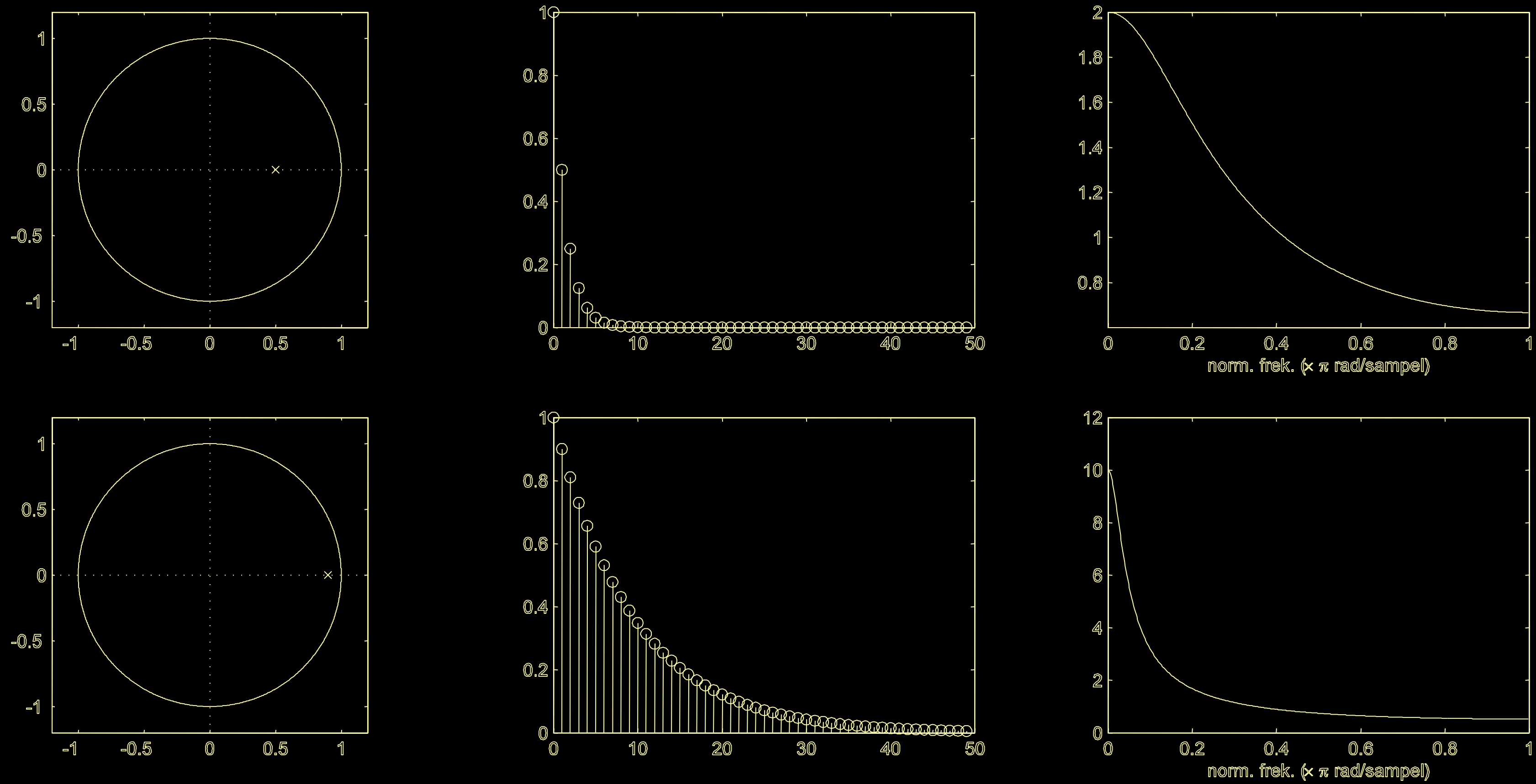


$$H(z) = \frac{z}{(z - R\cdot e^{j\theta})(z - R\cdot e^{-j\theta})}$$



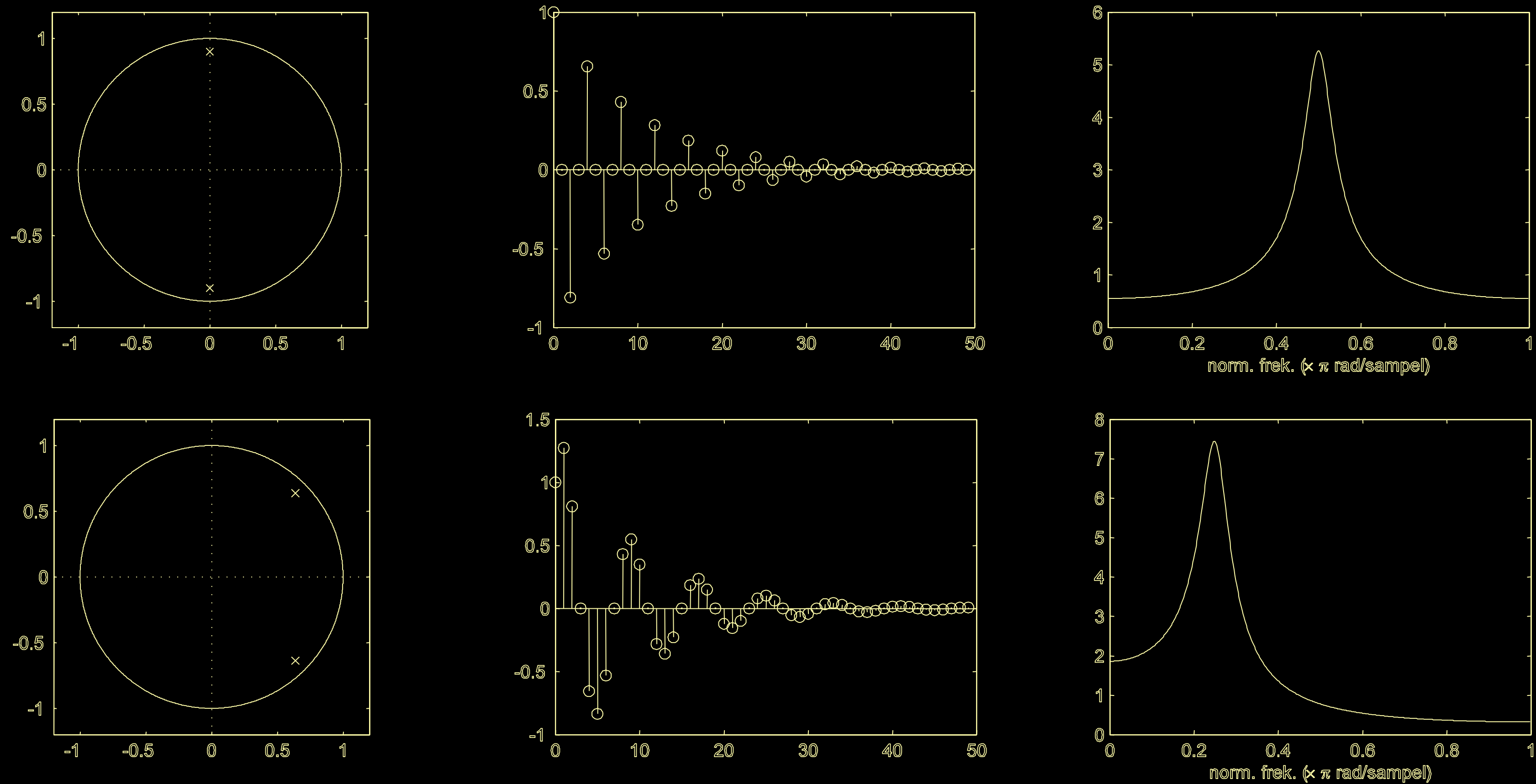
1- och 2-poler, exempel

Poler	Impulssvar	Frekvenssvar
z-planet	*tidsdomän*	*frekvensdomän*



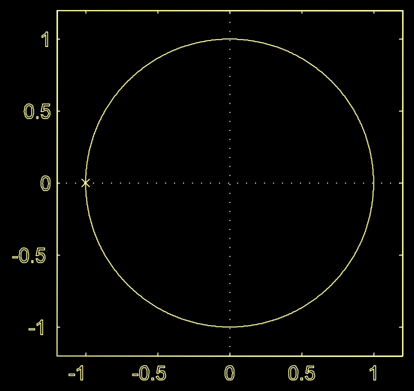
1- och 2-poler, exempel

Poler	Impulssvar	Frekvenssvar
z-planet	*tidsdomän*	*frekvensdomän*

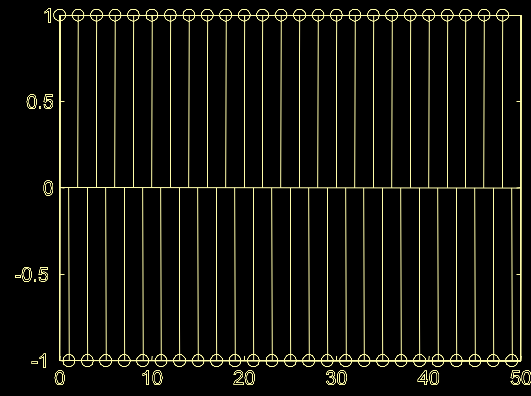


1- och 2-poler, exempel

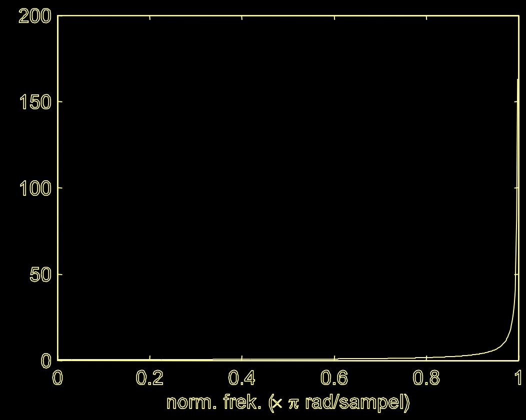
Poler
z-planet



Impulssvar
tidsdomän



Frekvenssvar
frekvensdomän



Tvåpolsresonatorn (forts)

- Man vill ofta styra resonatorn med en resonansfrekvens ψ och bandbredd B
- Resonansfrekvensen ψ sammanfaller inte exakt med polvinkeln θ
- De förhåller sig till varandra enligt

$$\cos\theta = \frac{2R}{1+R^2}\cos\psi$$

Tvåpolsresonatorn (forts.)

- Tvåpolsresonatorn modellerar ett dämpat svängande system
- Förekommer överallt i naturen
- Exempel: resonanserna i ett rör, t.ex. talröret

Filtrering i praktiken

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_M z^{-M}}$$

i matlab:

```
% filtrera vektorn X med B=[b0 b1...]; A=[a0 a1...];
Y = filter(B,A,X)

% plotta frekvenssvaret
freqz(B,A)
```

X(z) och H(z)

- Värdet av X(z) på enhetscirkeln vid frekvensen ω ger energin i x(n) vid den frekvensen
- Värdet av H(z) på enhetscirkeln vid frekvensen ω anger vad filtret gör med signalen vid den frekvensen

Sammanfattning

Återkopplade filter

- introducerar poler i överföringsfunktionen
- har ofta oändligt långt impulssvar
- är stabila omm alla poler ligger i enhetscirkeln
- kan användas för att invertera funktionen hos ett icke-återkopplat filter

Sammanfattning

- Tvåpolsresonatorer kan simulera många i naturen förekommande system, t.ex. formanter i den mänskliga rösten