Spektrala Transformer

Fouriertransformer

Fourier

Gif mig en vågform
och jag skola
skrifva den som en
summa af
sinuswågor !

Jean-Baptiste Fourier
1768-1830

Fouriertransformen

- Transformerar kontinuerliga signaler från tids- till frekvensdomän = *skriver om dem som en summa av sinusar…*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

forward

- … och tillbaks från frekvens till tid

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

inverse

Fourierserier

- Specialfall: då f(t) är periodisk blir ω diskret – vi samplar frekvensaxeln:
- $\omega = k\omega_0$ där $\omega_0 = 2\pi/T$

$$F(k\omega_0) = c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Fourierserier

Om *f*(*t*) är reell gäller att

$$c_k = c_{-k}^*$$

$$f(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

$$c_k = a_k + j\,b_k$$

Fourierseriens egenskaper

- Beloppet $|c_k|$ ger signalens spektrum
- Spektrumlutningen ger ett mått på jämnheten i signalen
  - för fyrkantvåg avtar spektrum med $1/n$
  - för triangelvåg avtar spektrum med $1/n^2$
- Integrering i tidsdomänen ökar spektrumlutningen, derivering minskar den
- Diskontinuiteter i insignalen orsakar ”ringningar” (Gibbs fenomen)

Transformer i Fourier-familjen

Tidsdomän	Frekvensdomän	Transform
Periodisk Kontinuerlig	Diskret Aperiodisk	Fourierserie
Periodisk Diskret	Diskret Periodisk	DFT (Diskret fouriertransform)
Aperiodisk Kontinuerlig	Kontinuerlig Aperiodisk	Fouriertransform
Aperiodisk Diskret	Kontinuerlig Periodisk	Z-transform

DFT – Diskret Fouriertransform

Fouriertransform av verkliga, samplade signaler – inte bara matte:

- Spektral analys
  - Spektrum & Spektrogram
- Filtrering & bildbehandling
  - Snabb faltning av långa sekvenser/stora filterkärnor
- Kodning
  - Spektralbaserad bildkodning (typ JPEG)
  - Ljudkodning (typ MP3)
- Talteknologi
  - Särdragsextraktion för taligenkänning mm
- Audio/musik
  - Pitch-shift/time-stretch

Och så vidare…

DFT - domäner

- DFT transformerar signaler mellan

diskret tidsdomän

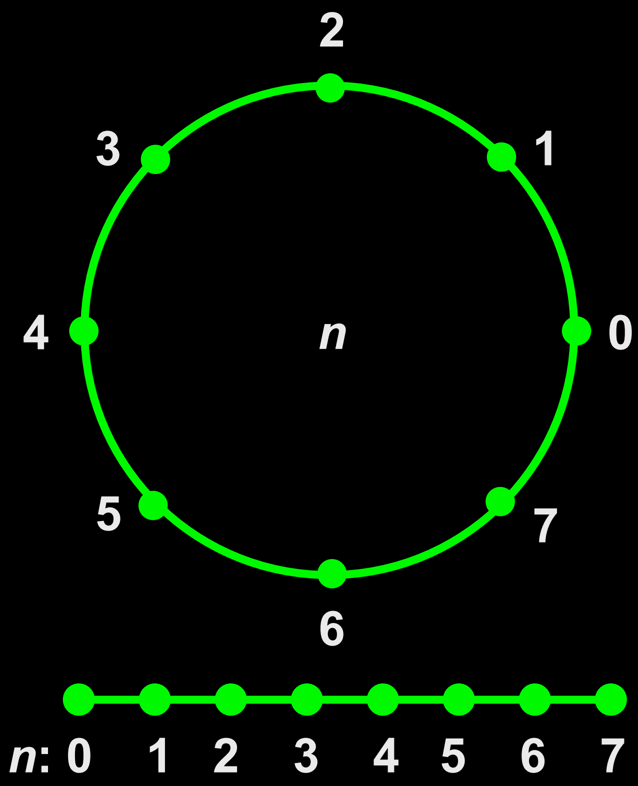
och

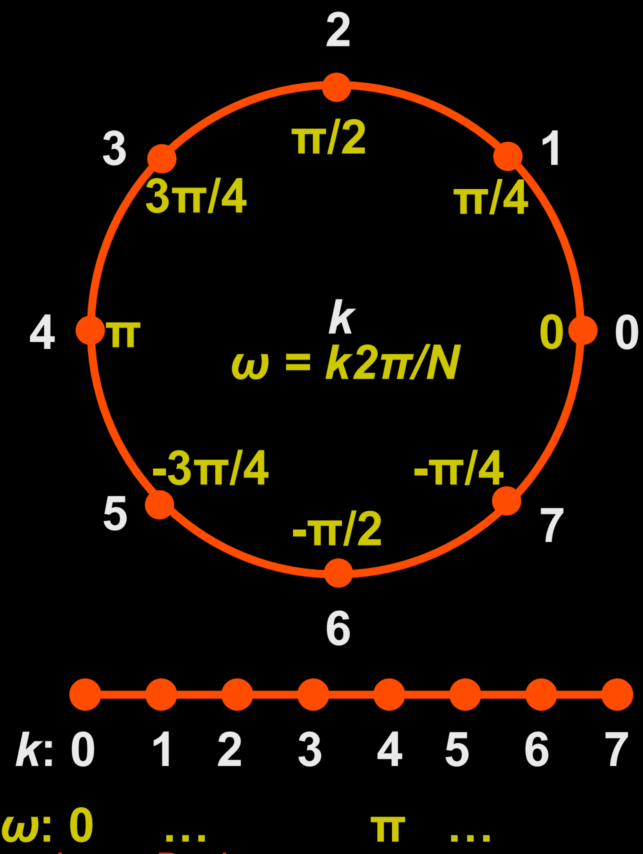
diskret frekvensdomän

- *N* punkter i tidsdomänen ger *N* punkter i frekvensdomänen

DFT - domäner

Tidsdomän N=8 Frekvensdomän

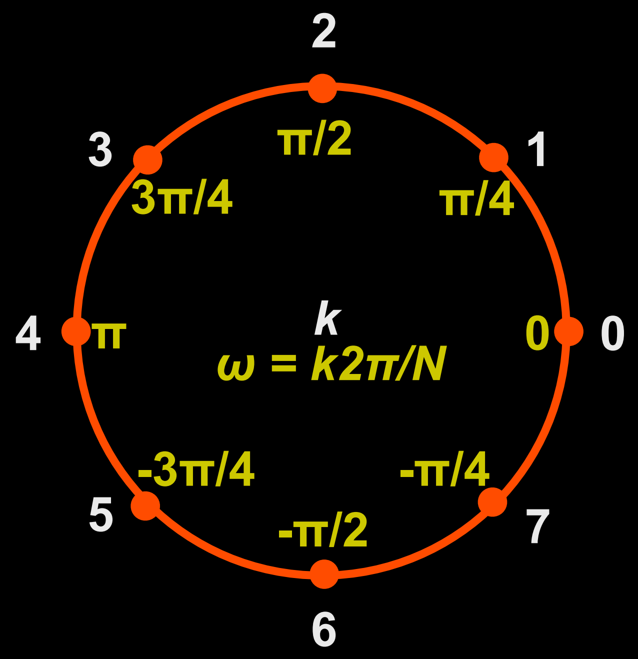




DFT - basvektorer

- Basvektorerna är *N* st. phasors

$$b_k(n) = e^{j\,nk2\pi/N}$$



DFT

Tid → Frekvens (DFT)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jnk2\pi/N}$$

Frekvens → Tid (Invers DFT, IDFT)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jnk2\pi/N}$$

DFT som en matris

$$
\mathbf{F} = \begin{matrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & e^{j2\pi/N} & \cdots & e^{j2\pi(N-1)/N} \\
\vdots & \vdots & e^{j2\pi kn/N} & \vdots \\
1 & e^{j2\pi(N-1)/N} & \cdots & e^{j2\pi(N-1)(N-1)/N}
\end{matrix}
$$

DFT som en matris

Tid $\rightarrow$ Frekvens (DFT)

$$\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}}$$

Frekvens $\rightarrow$ Tid (Invers DFT, IDFT)

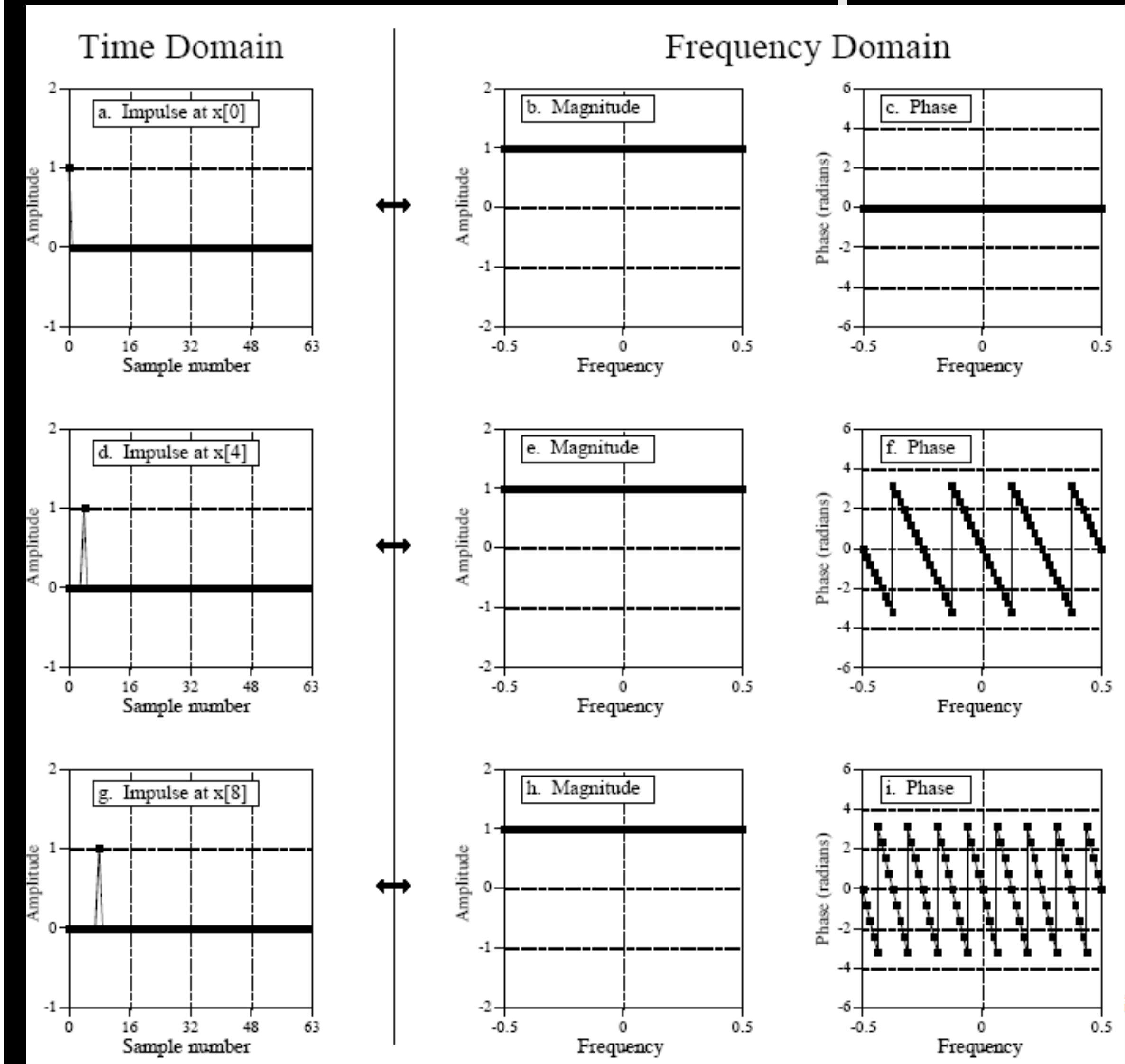
$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{X}}$$

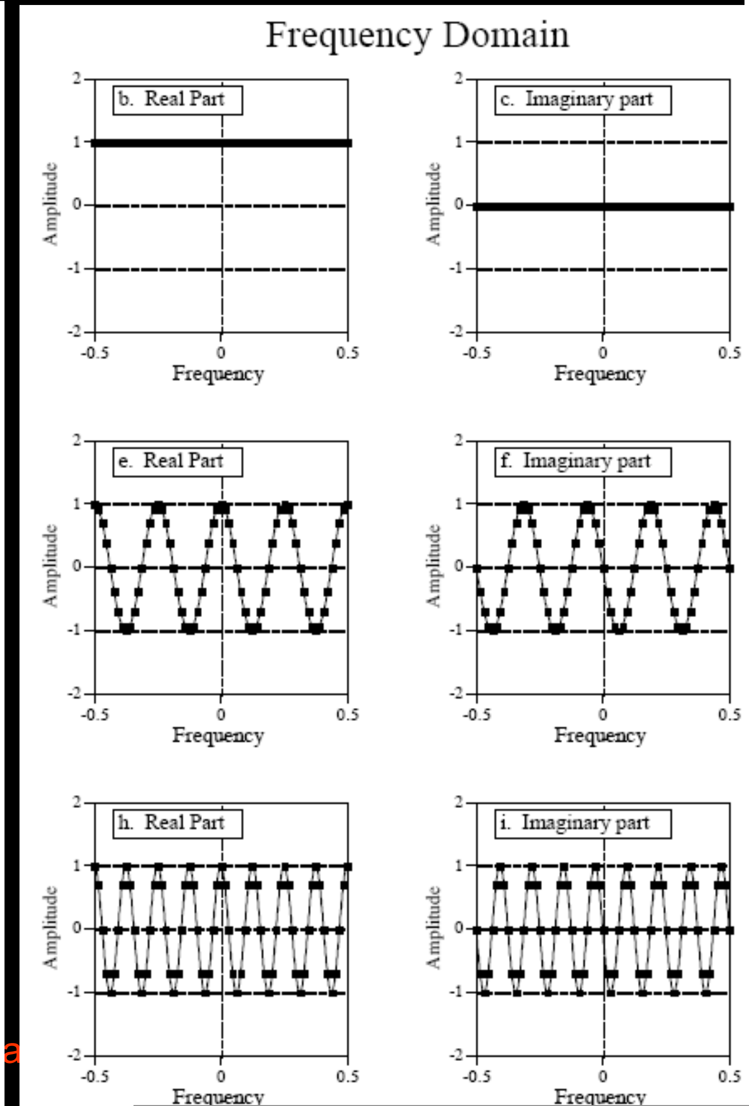
DFT för reella sekvenser

- Om x(n) är reell blir X(k) symmetrisk kring N/2:

$$X(N\text{-}k) = X(k)^*$$

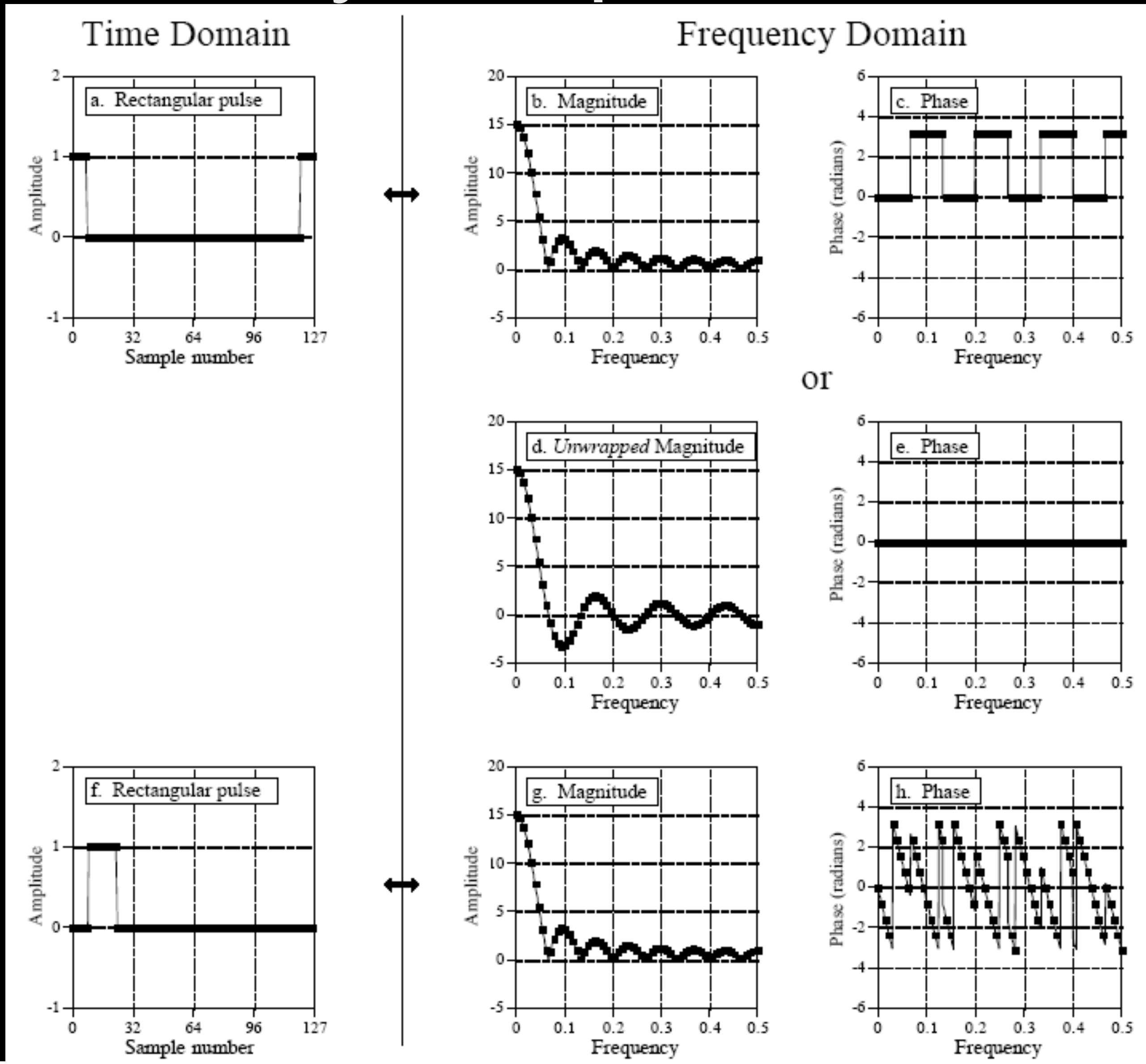
Några DFT-transformpar: impulser



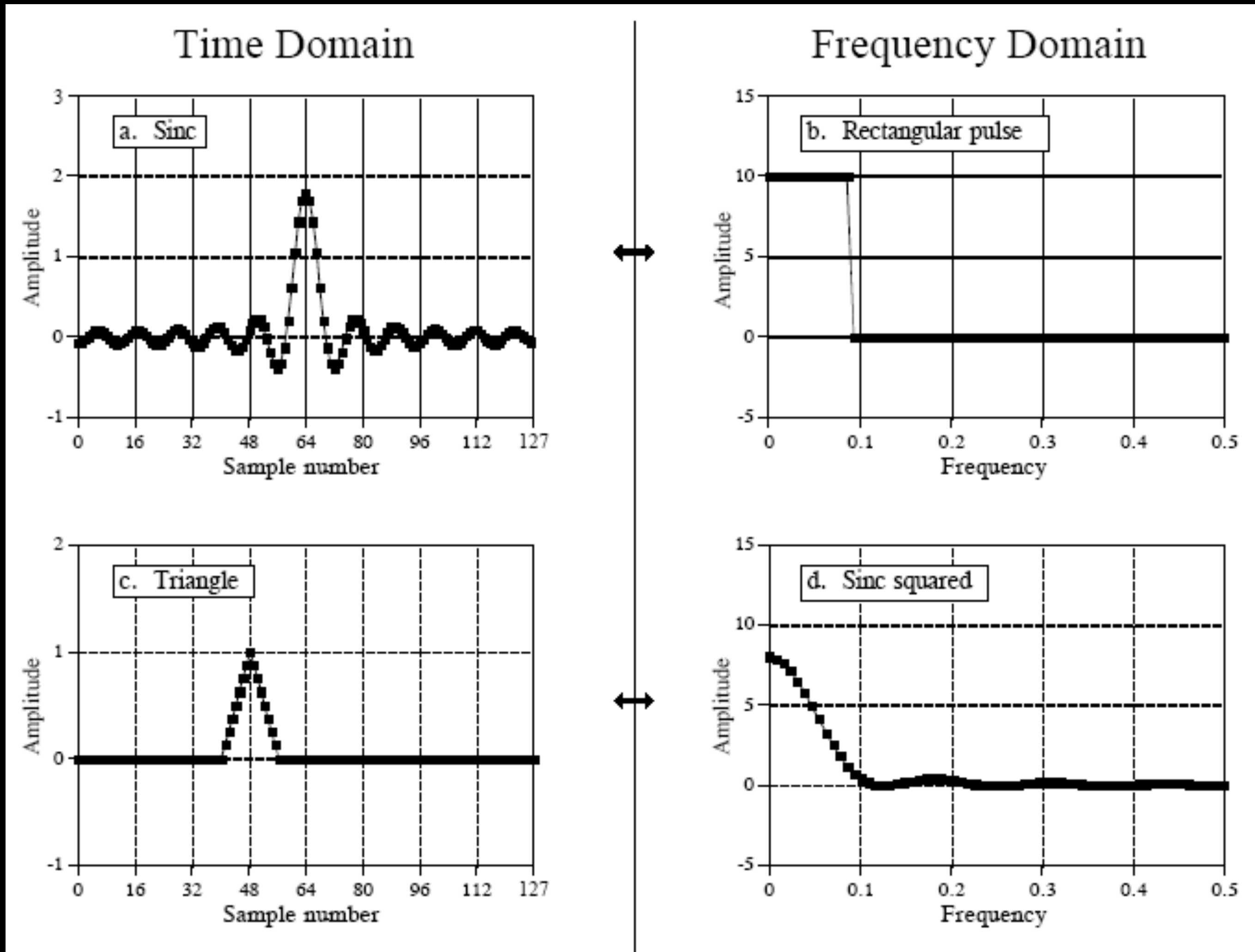


ur Steven W. Smith "Digital Signal Processing"

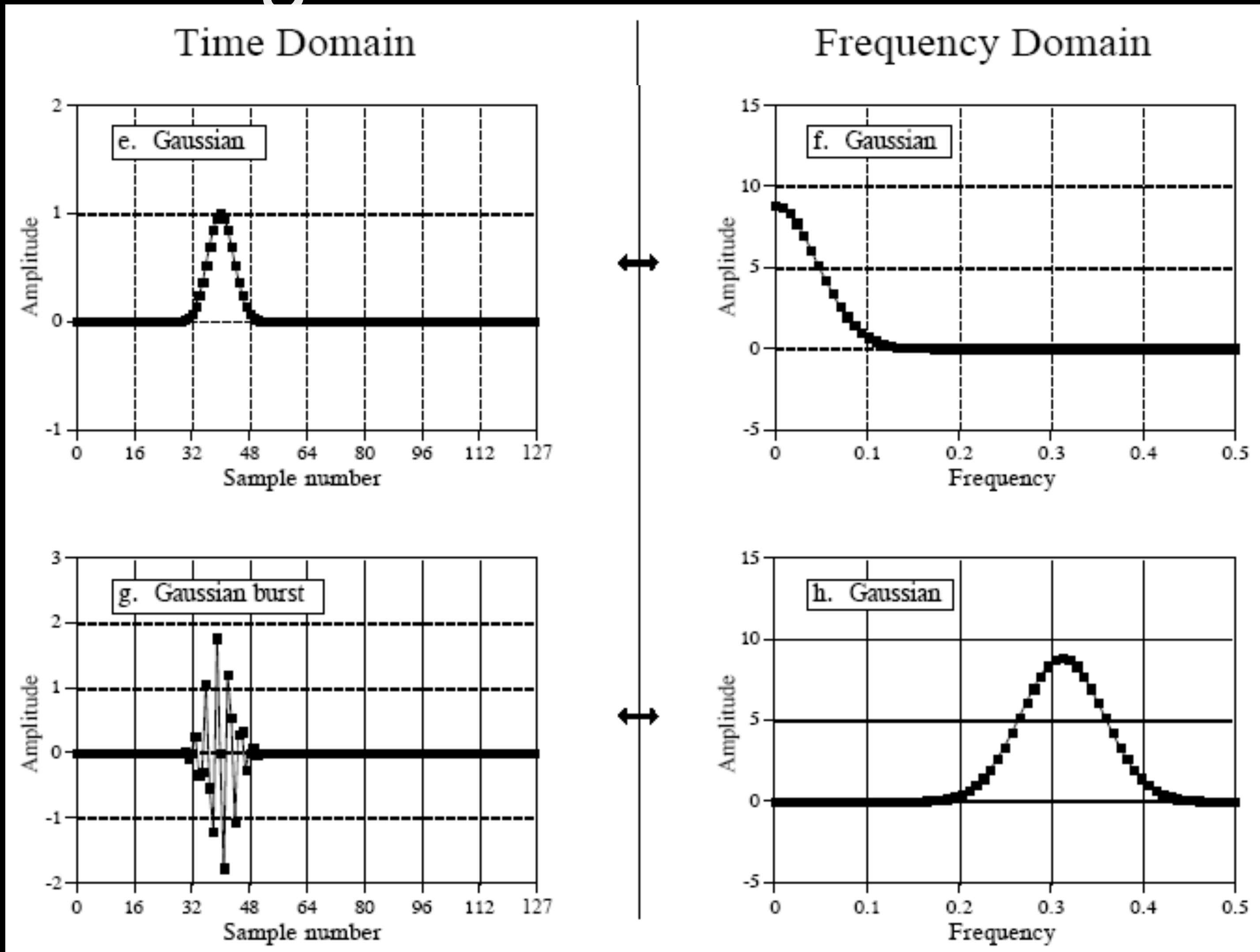
Några DFT-transformpar: fyrkantpulser



Några DFT-transformpar: pulser

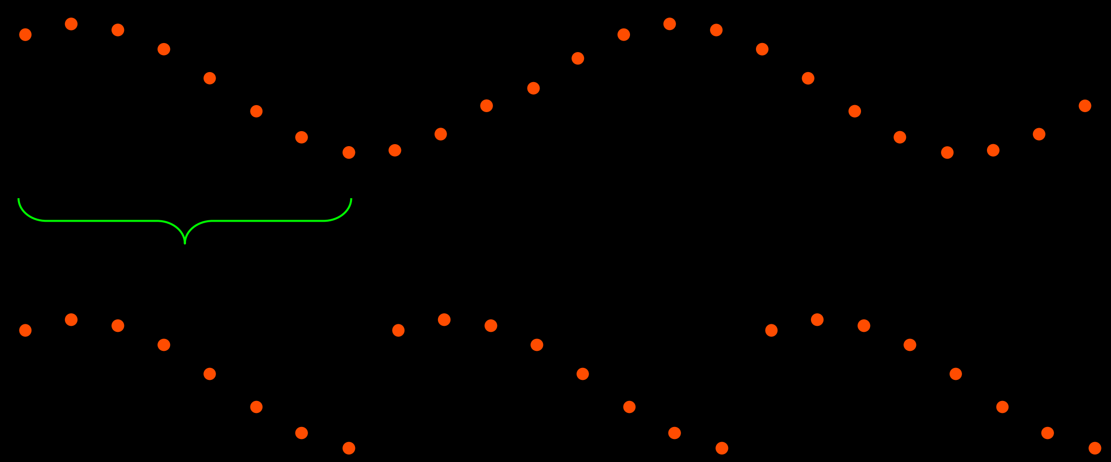


Några DFT-transformpar: gauss-funktioner



Ett praktiskt problem…

- Vad innebär det att tidsdoänen blir cirkulär?



- Diskontinuiteter - påverkar spektrum!
  - sidolober

Lösning: fönstring

- Signalen multipliceras med ett fönster som går mot noll i intervallets ändar!
  - Undertrycker sidolober
  - Något försämrad upplösning i frekvensled

FFT – Fast Fourier Transform

- FFT är en effektiv algoritm för att beräkna DFT
- FFT är helt avgörande för att många applikationer av DFT ska vara praktiskt möjliga!
- FFT fungerar genom att rekursivt dela upp problemet i mindre problem, s.k. ”söndra och härska” (divide-and-conquer)-metodik

Beräkningshastighet

Antal multiplikationer:

- DFT: ~N^2
- FFT: ~$N \log(N)$

N	*ggr förbättring* N^2 / $N \log N$
64	15.3
256	46.1
1024	147.5
4096	492.1

DFT/IDFT

- Kan vi snabba upp beräkningen av IDFT också?
- Ja!

$$\mathrm{IDFT}\{\mathbf{X}\} = \mathrm{DFT}\{\mathbf{X}^*\}/N$$

- FFT kan användas även för invers DFT

Sammanfattning

- *Fouriertransformen* uttrycker icke-periodiska signaler som kontinuerliga frekvensfunktioner
- En *Fourierserie* uttrycker periodiska signaler som en summa av diskreta frekvenskomponenter
- *DFT* transformerar mellan diskret tids-domän och diskret frekvensdomän
- FFT är en algoritm för att beräkna DFT
- FFT är fundamental i många DSP-tillämpningar