Spektrala Transformer

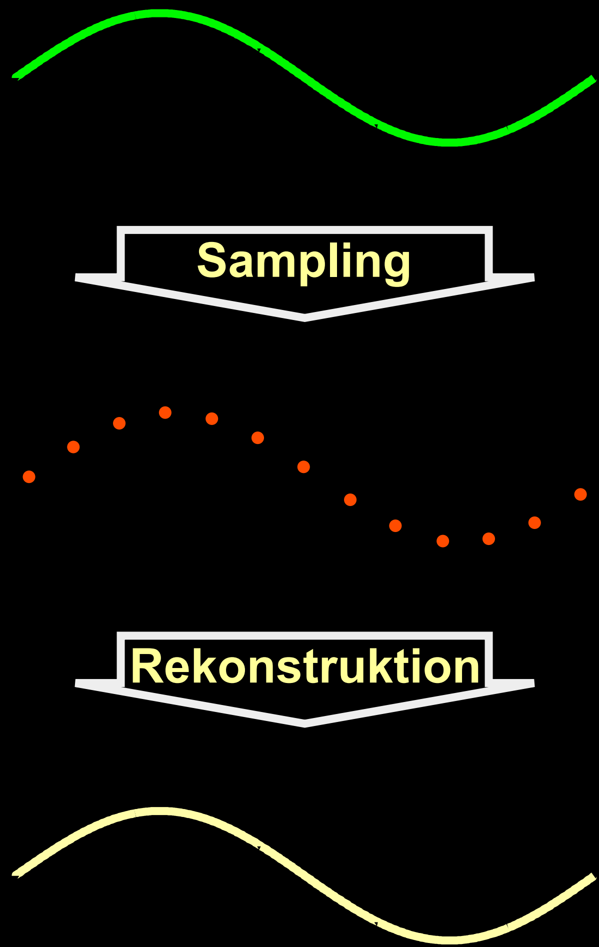
Kurssammanfattning

Fyra kärnkoncept

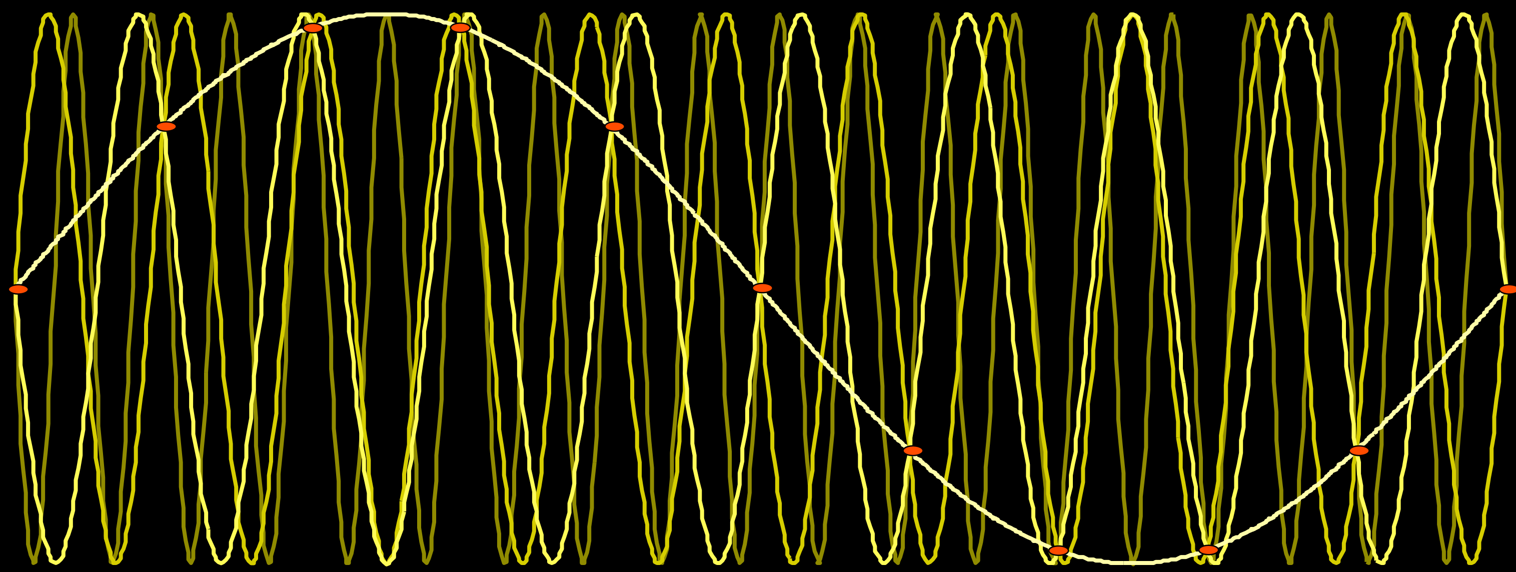
- Sampling
- Faltning
- Poler och nollställen
- Fouriertransform

Koncept #1: Sampling

En korrekt samplad signal kan rekonstrueras exakt, dvs ingen information förloras i processen



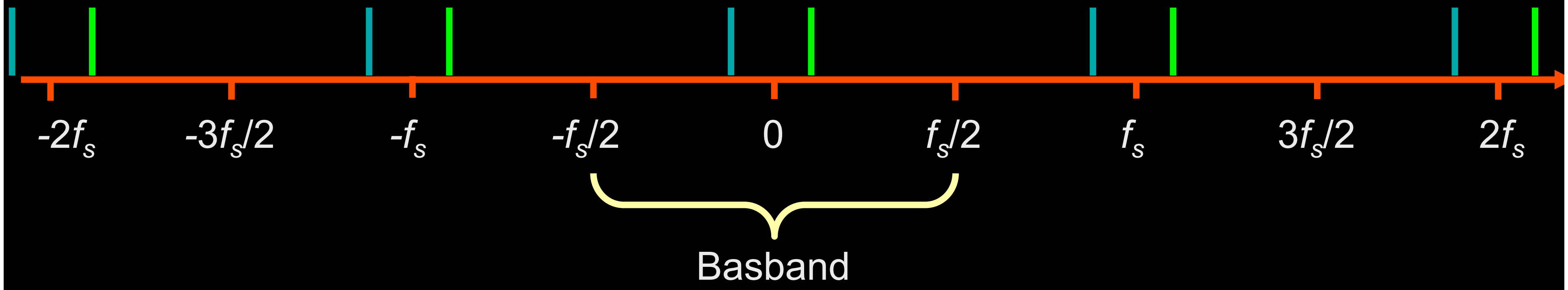
Sampling: Aliasing



- Det finns ett *oändligt antal* sinusvågor som ger *exakt samma* sampelpunkter

Sampling: Basband

- Frekvensspektrum speglas i alla multiplar av nykvistfrekvensen $f_s/2$
- Frekvensområdet $[-f_s/2, f_s/2]$ kallas basbandet



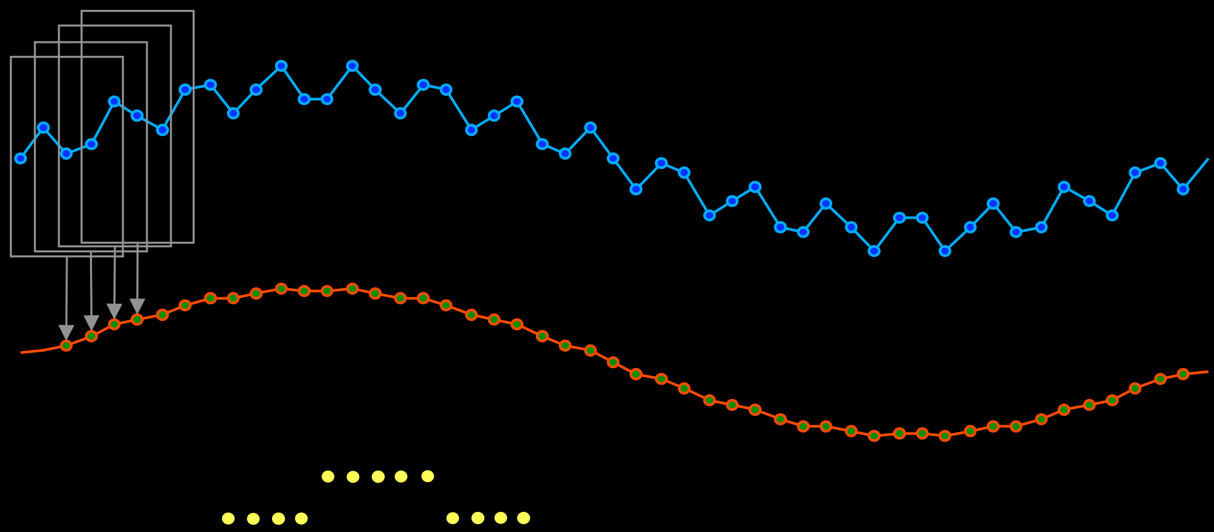
Samplingsteoremet

En signal kan samplas korrekt omm den inte innehåller frekvenser över halva samplingsfrekvensen (*Nyquistfrekvensen)*

Koncept#2: Faltning

- Faltning är en matematisk operation som kombinerar två sekvenser med varandra
- Faltning dyker upp på många håll i signalbehandlingsområdet, t.ex. filtrering, där utsignalen från ett filter är faltningen mellan insignal och impulssvar

Enkelt filter



Moving average = faltning med rektangulär puls

LTI - system

$x_1(n) \longrightarrow$ **Linjärt system** $\longrightarrow y_1(n)$

$x_2(n) \longrightarrow$ **Linjärt system** $\longrightarrow y_2(n)$

$x_1(n) + x_2(n) \longrightarrow$ **Linjärt system** $\longrightarrow y_1(n) + y_2(n)$

$c\, x_1(n) \longrightarrow$ **Linjärt system** $\longrightarrow c\, y_1(n)$

$x_1(n) \longrightarrow$ Tidsinvariant system $\longrightarrow y_1(n)$

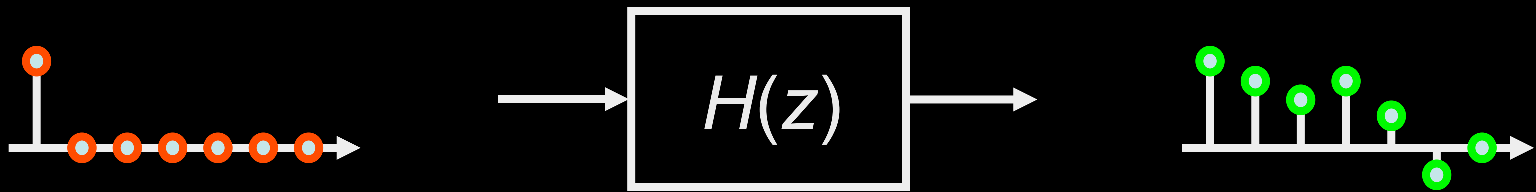
$x_2(n) = x_1(n+k) \longrightarrow$ Tidsinvariant system $\longrightarrow y_2(n) = y_1(n+k)$

$x(n) \longrightarrow$ Tidsinvariant system $\longrightarrow$ Tidsinvariant system $\longrightarrow y(n)$

$x(n) \longrightarrow$ Tidsinvariant system $\longrightarrow$ Tidsinvariant system $\longrightarrow y(n)$

Impulssvar

- Filtrets impulssvar $h(n)$ är filtrets utsignal då insignalen är en *impuls* $\delta(n)$
- Filter utan återkoppling har ändligt impulssvar (FIR - Finite Impulse Response)
- För ett sådant filter är $h(n) = a_n$



Faltning (convolution)

- När en signal $x(n)$ filtreras genom ett filter med inpulssvaret $h(n)$ så är utsignalen $y(n)$ en *faltning* av $x(n)$ och $h(n)$
- Betecknas $y(n) = x(n)*h(n)$

Faltning

- Ekvationen kan tolkas som att man
  - vänder bak-och-fram på *x(k)* och förskjuter *n* steg
  - Multiplicerar med *h(k)*
  - Summerar produkten över alla *k*

Faltningsteormet

Faltning i tidsdomänen

$\leftrightarrow$

Multiplikation i frekvensdomänen

Multiplikation i tidsdomänen

$\leftrightarrow$

Faltning i frekvensdomänen

Fler exempel på faltning

- Trunkering, fönstring
  – Mult med fönster i tidsdomänen ger faltning med någon funktion i frekvensdomänen

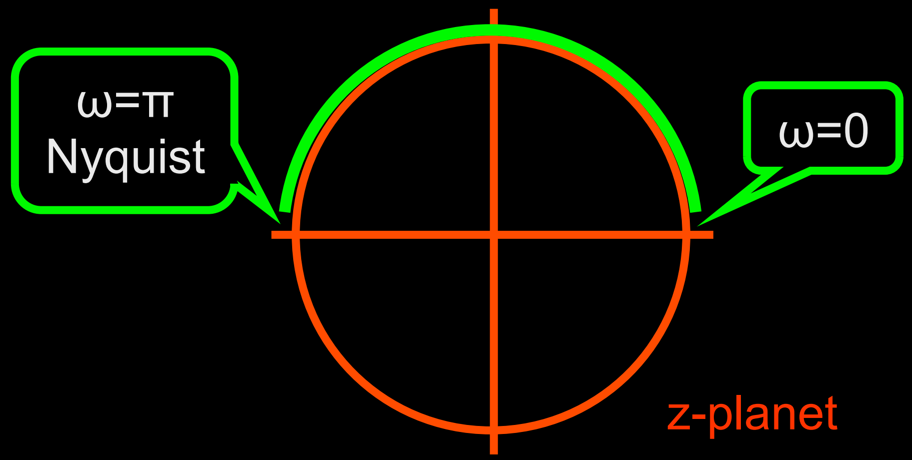
    ger, sidolober i spektrum
- Amplitudmodulering
  – Mult med sinus (bärvåg) i tidsdomän ger faltning med en ”spik” i frekvens = translation av spektrum
- Olinjäriteter t.ex. $y(t)=x^2(t)$
  - Signalen multipliceras med sig själv i tidsdomänen, ger faltning med sig själv i frekvens

Koncept#3: Poler och nollställen

- Ett filter kan beskrivas med en komplex överföringsfunktion H(z)
- H(z) kan studeras med hjälp av dess poler och nollställen i z-planet

z-planet

- H(z) är en *komplexvärd* funktion av en komplex variabel
- Övre halvan av enhetscirkeln är frekvensaxeln
- Frekvensgången fås genom att evaluera $|H(z)|$ över enhetscirkeln: $|H(\omega)| = |H(e^{j\omega})|$



z-planet (forts.)

Vi kan få en bild av $H(z)$ genom att plotta dess *nollställen* $H(z) = 0$

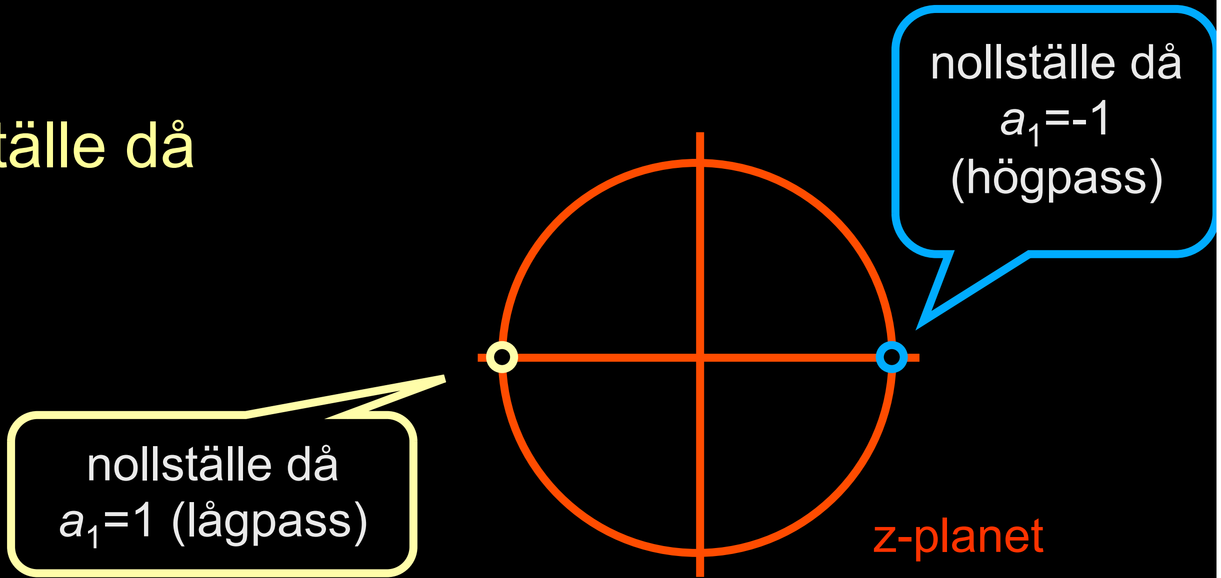
exempel:

$y(n) = x(n) + a_1 x(n-1)$

$H(z) = 1 + a_1 z^{-1}$

$H(z) = 0$ ger ett nollställe då

$z = -a_1$



z-planet (forts.)

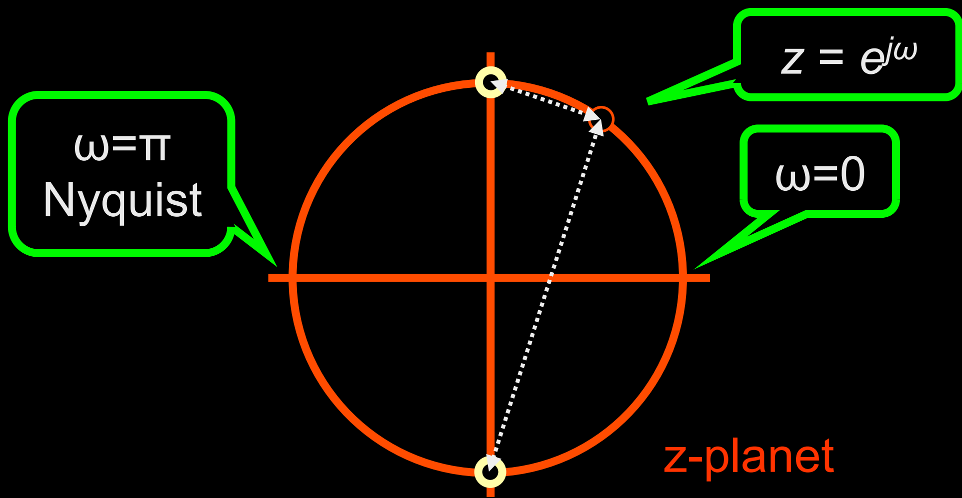
exempel:

$y(n) = x(n) + x(n-2)$

$H(z) = 1 + z^{-2}$

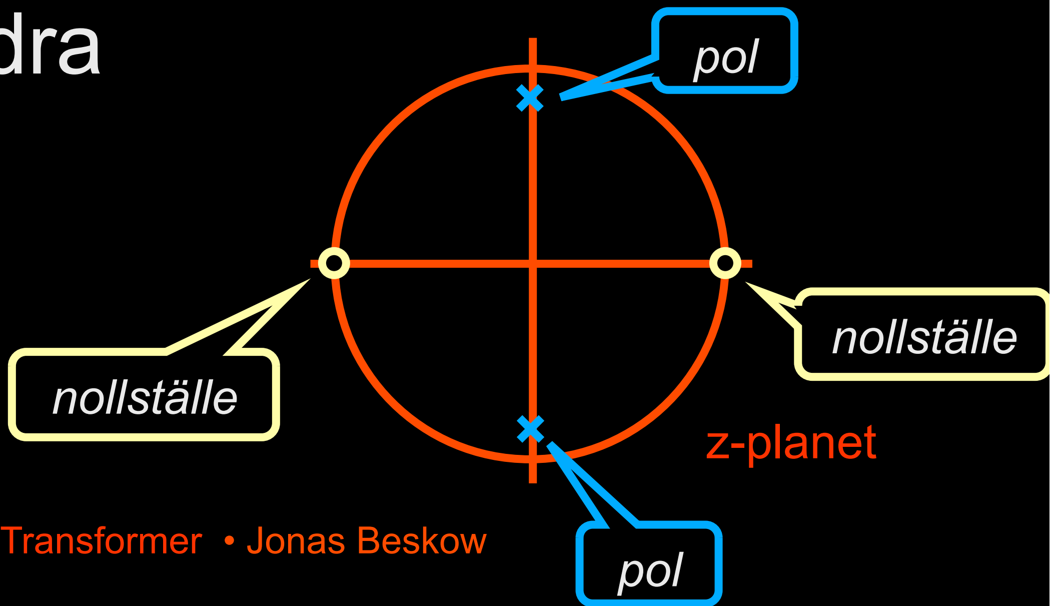
$H(z) = 0$ ger $z = \pm j$

$|H(\omega)| = |e^{-j\omega} - j|\ |e^{-j\omega} + j|$



Poler och nollställen

- Ett filter kan beskrivas i termer av poler och nollställen (poles and zeros)
- Plottas i z-planet som kryss och ringar
- Om en pol och ett nollsälle sammanfaller, så tar de ut varandra



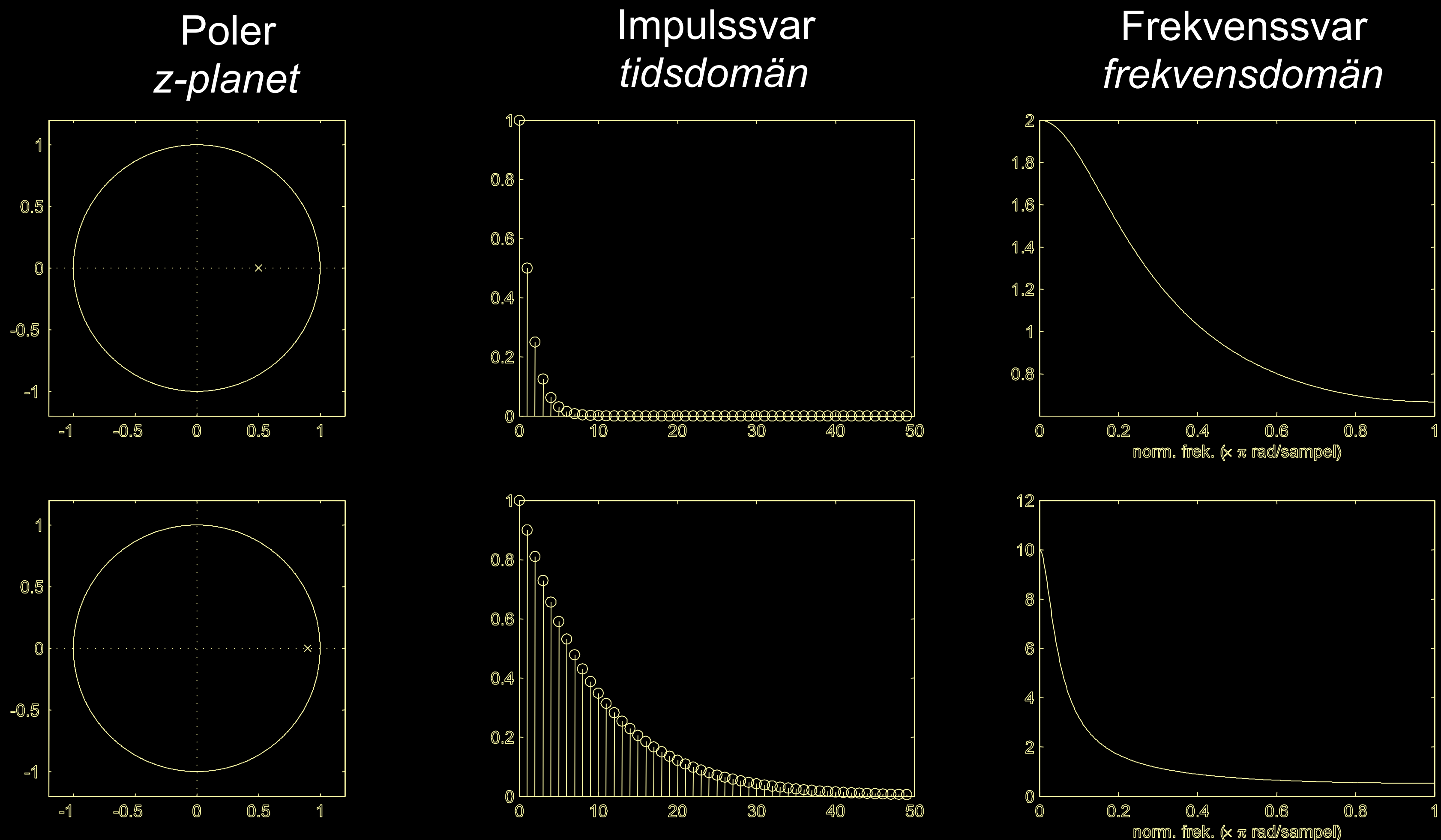
Exempel: Filtret

har nollställen i $z = \pm 1$
och poler i $z = \pm 0.9j$

Poler och nollställen

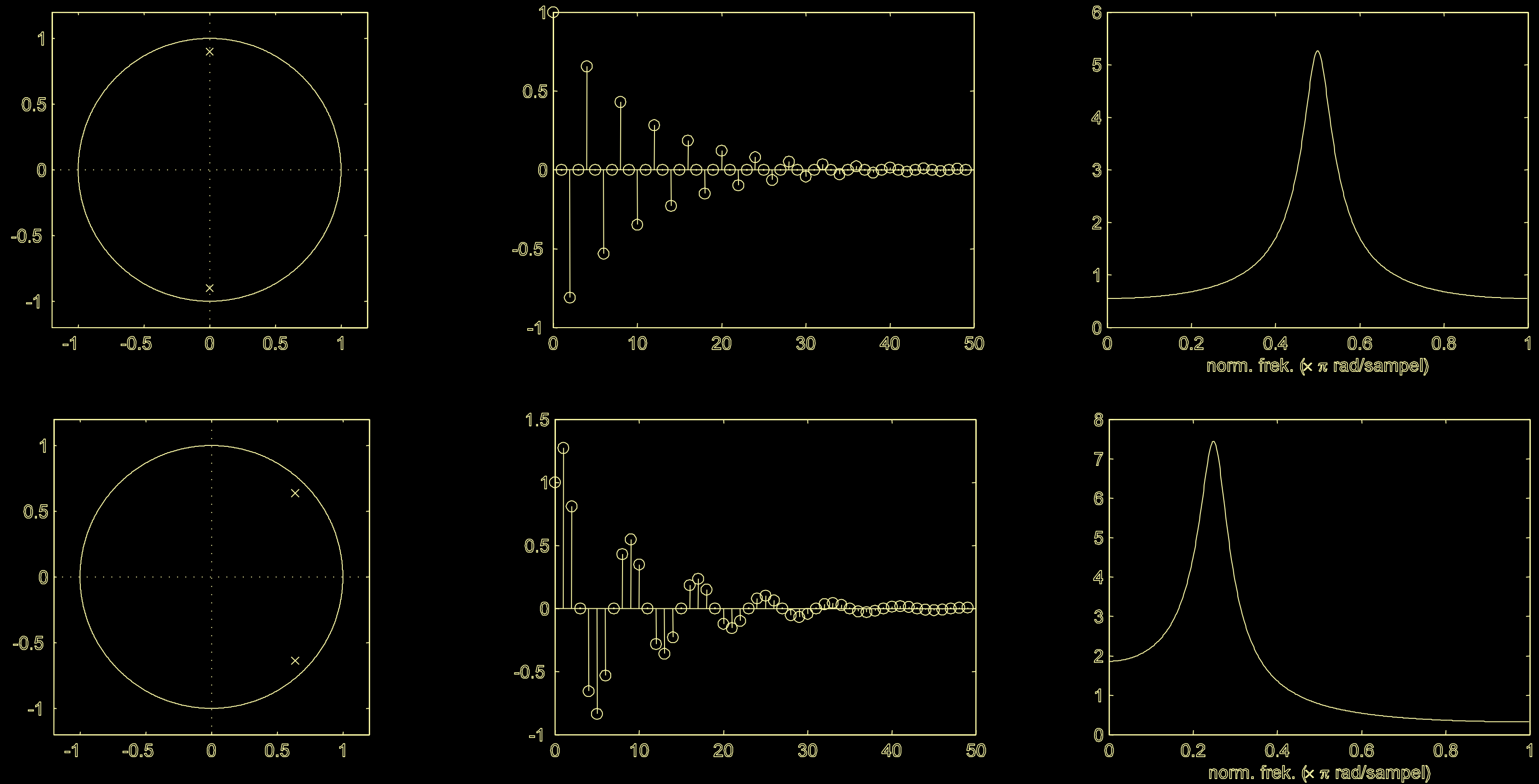
- Poler och nollställen som ej ligger på reella axeln förekommer alltid parvis komplexkonjugerade
- Filter utan återkoppling har endast nollställen
- Ett återkopplat filter har även poler

1- och 2-poler, exempel



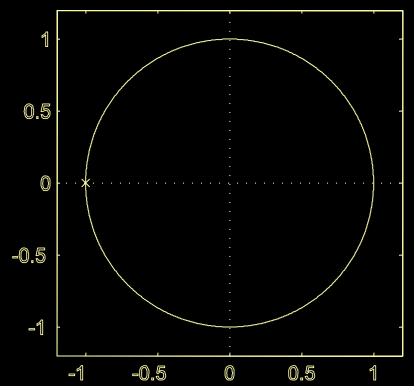
1- och 2-poler, exempel

Poler	Impulssvar	Frekvenssvar
z-planet	*tidsdomän*	*frekvensdomän*

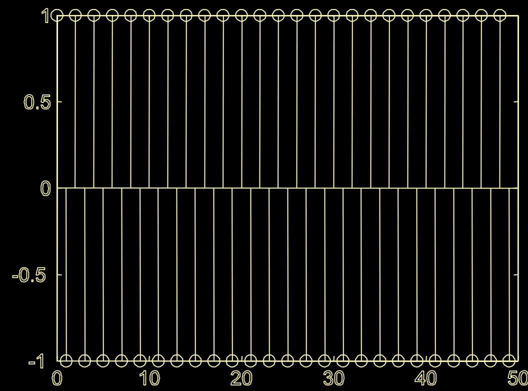


1- och 2-poler, exempel

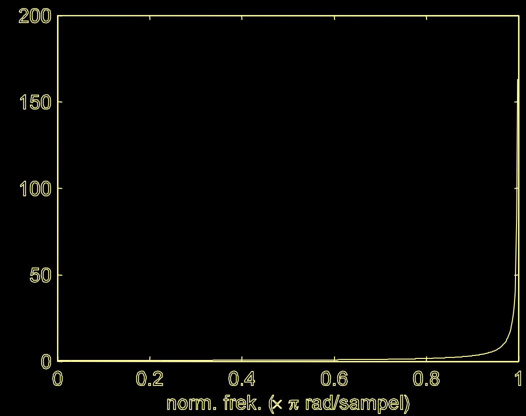
Poler
z-planet



Impulssvar
tidsdomän



Frekvenssvar
frekvensdomän



Stabilitet

Ett filter är stabilt
omm alla poler ligger innanför
enhetscirkeln

Koncept #4: Transformer

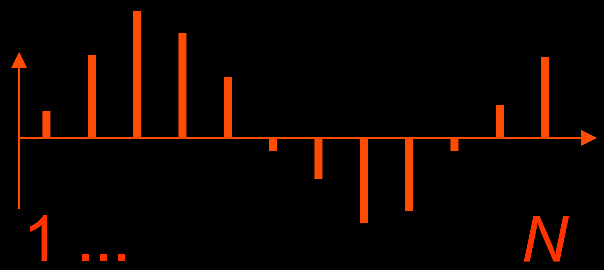
Alla signaler kan delas upp i en summa av sinusformade komponenter

- Transformer översätter mellan tids- och frekvensdomän
- Med en signals *spektrum* avses fouriertansformen, ofta i belopp
- F.T. är mycket väl nyttjad i DSP tack vare den snabba FFT-algoritmen

Transformer

- En transform är en *viktad summa av basvektorer*
- Rymderna – eller domänerna – som vi transformerar från och till kan ha *godtyckligt* många dimensioner.

  exempel:
  en samplad ljudsignal med *N* värden



  kan betraktas som en *punkt* i en *N*-dimensionell tidsdomän

- En *spektral transform* transformerar mellan *tidsdomänen* och *frekvensdomänen*

Fouriertransformen

- Transformerar kontinuerliga signaler från tids- till frekvensdomän = *skriver om dem som en summa av sinusar…*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

forward

- … och tillbaks från frekvens till tid

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

inverse

Fourierserier

- Specialfall: då f(t) är periodisk blir ω diskret – vi samplar frekvensaxeln:
- $\omega = k\omega_0$ där $\omega_0 = 2\pi/T$

$$F(k\omega_0) = c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

DFT

Tid → Frekvens (DFT)

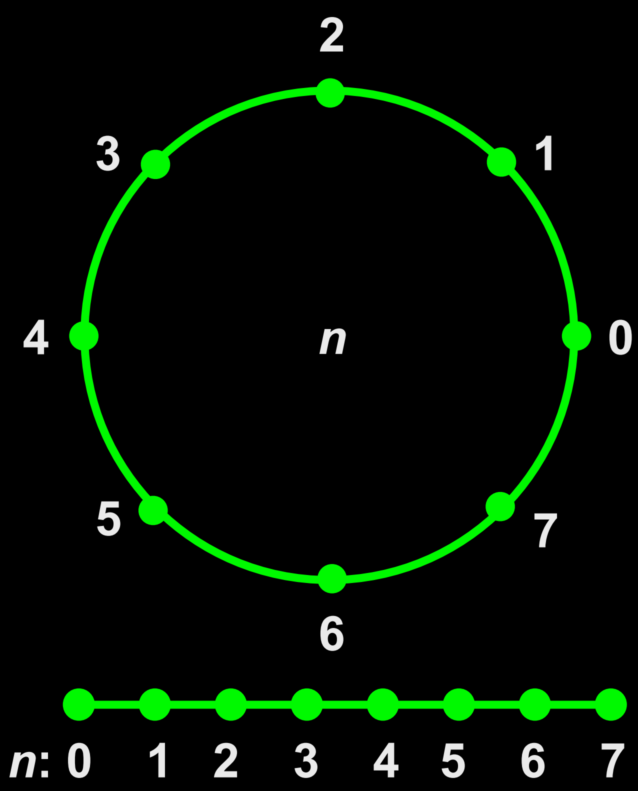
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jnk2\pi/N}$$

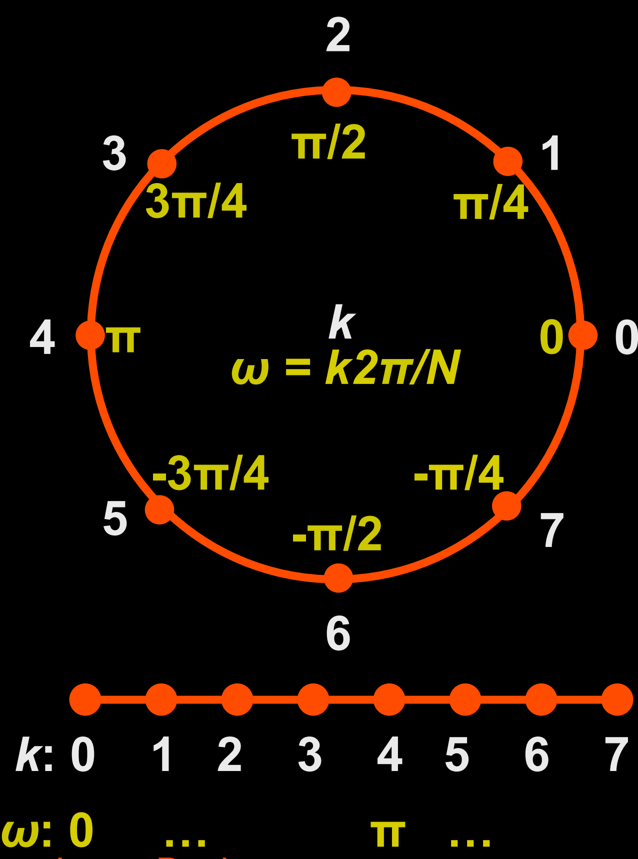
Frekvens → Tid (Invers DFT, IDFT)

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jnk2\pi/N}$$

DFT - domäner

Tidsdomän $N=8$ Frekvensdomän





FFT – Fast Fourier Transform

- FFT är en effektiv algoritm för att beräkna DFT
- FFT är helt avgörande för att många applikationer av DFT ska vara praktiskt möjliga!
- FFT fungerar genom att rekursivt dela upp problemet i mindre problem, s.k. ”söndra och härska” (divide-and-conquer)-metodik
- N måste vara jämn 2-potens

Z-transformen

- Transformerar tidsdiskreta sekvenser till Z-planet

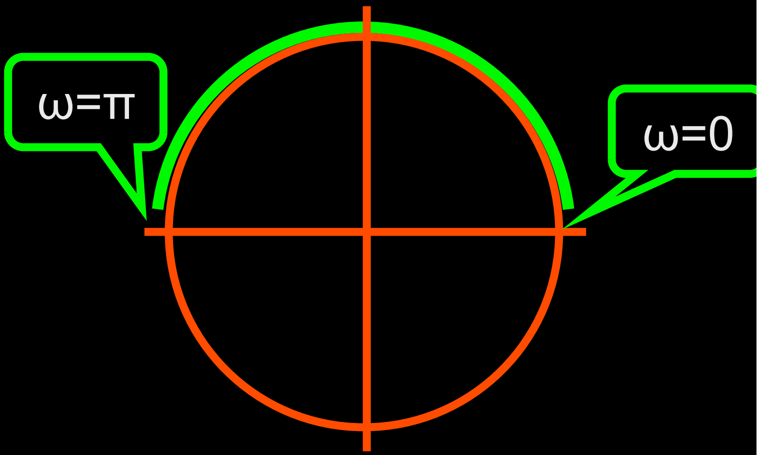
$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

Z-transformen på enhetscirkeln

- Värdet av X(z) på enhetscirkeln vid frekvensen ω ger *energin i x(n) vid den frekvensen*
- Värdet av H(z) på enhetscirkeln vid frekvensen ω anger *vad filtret gör med signalen vid den frekvensen*
- *Kallas ibland DTFT – Fouriertransform i diskret tid*

Kom ihåg:

$$z = e^{j\omega}$$



$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-jk\omega}$$

Transformer i Fourier-familjen

Tidsdomän	Frekvensdomän	Transform
Periodisk & kontinuerlig	Aperiodisk & diskret	Fourierserie
Periodisk & diskret	Periodisk & diskret	Diskret fouriertransform
Aperiodisk & kontinuerlig	Aperiodisk & kontinuerlig	Fouriertransform
Aperiodisk & diskret	Periodisk & kontinuerlig	Z-transform/DTFT