KTH Datavetenskap
och kommunikation

DT1130 Spektrala transformer
Tentamen 111215

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift maximalt ger 4 p. Normalt gäller följande betygsgränser: **E: 9 p, D: 11.5 p, C: 14 p, B: 16 p, A: 18 p**
Tillåtna hjälpmedel: räknare, formelblad (bifogat)

Lycka till!

1

En tidskontinuerlig signal

$$y(t) = \sin(2\pi\alpha t)\sin(2\pi\beta t)$$

samplas med $f_s = 8000Hz$. Ett schemstiskt spektrum av den samplade signalen syns i figur 1.

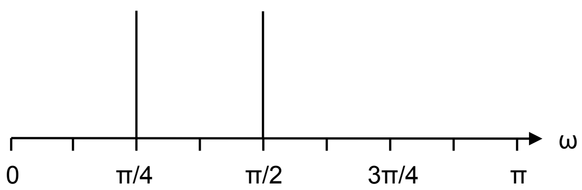
Bestäm α och β, givet att
$\alpha < \frac{f_s}{2}$, $\beta < \frac{f_s}{2}$ samt $\alpha + \beta > \frac{f_s}{2}$

2

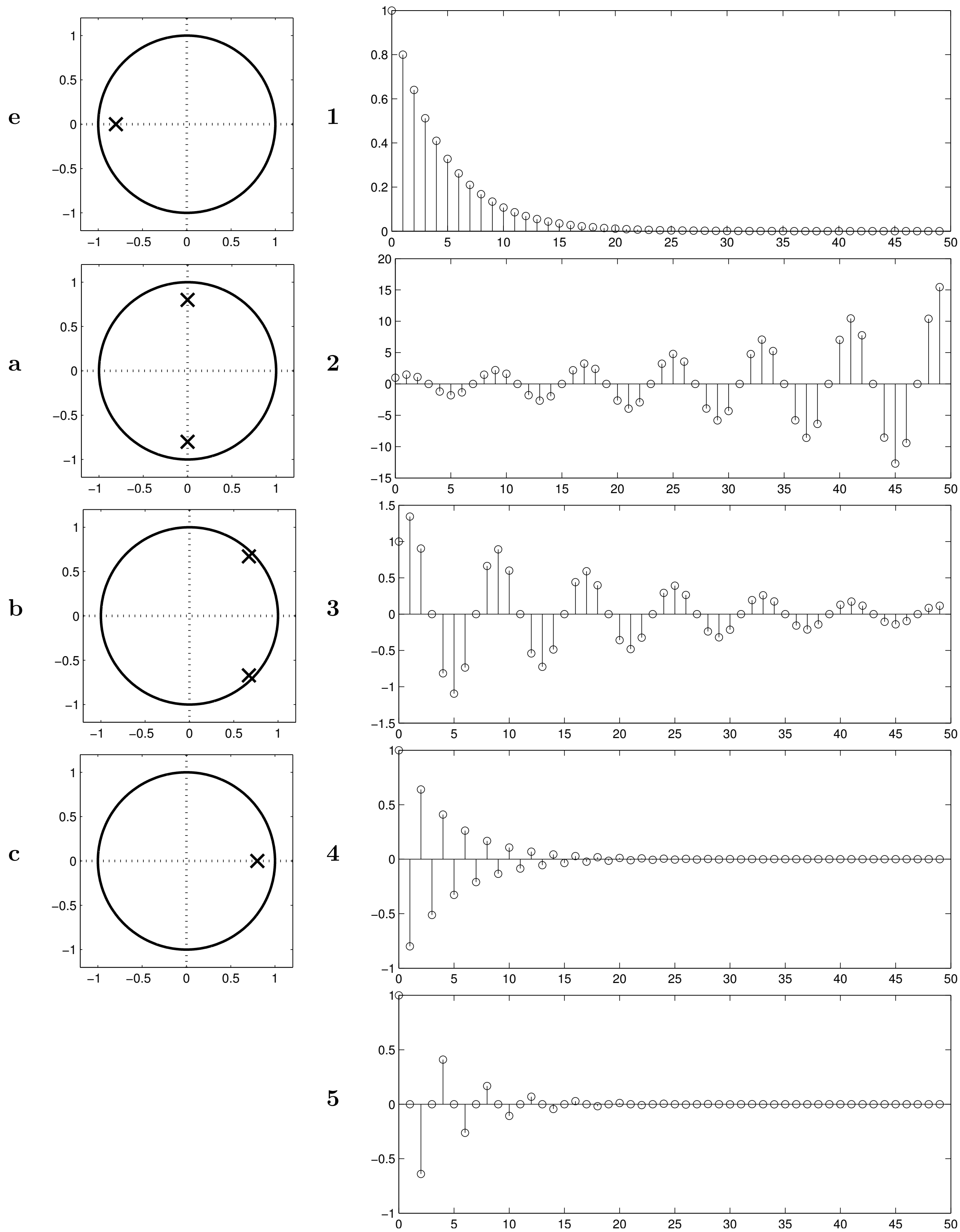
I figur 2 ser du ett antal pol/nollställesdiagram och ett antal tillhörande impulssvar. Para ihop de som beskriver samma filter, med motivering. Observera att det blir ett impulssvar över. *(1p/ korrekt par)*

3

Högtalarkonstruktör Mega von Knapp lyssnar på sin nya högtalare och upplever att ljudet är lite ”burkigt”. Hon bestämmer sig för att mäta upp högtalarens impulssvar. Sagt och gjort, hon riggar en svindyr mikrofon framför högtalarmembranet och spelar in samtidigt som hon matar ut



Figur 1. Spektrum av en samplad signal



Figur 2.

en impuls från datorn till högtalaringången. Hon noterar att den inspelade signalen har formen av en dämpad svängning och uppskattar den till

$$h(n) = e^{-0.5n}\cos(\frac{\pi}{16}n)$$

a Hjälp Mega von Knapp att beräkna överföringsfunktionen $H(z)$ för högtalaren (vi antar här att den svindyra mikrofonen har spikrak frekvensgång och därmed inte inverkar på resultatet) *(2p)*

b Nu vill hon eliminera den dämpade svängningen. Designa ett filter som gör detta när det sätts i serie med högtalaren, dvs. den sammantagna överförinngsfunktionen filter + högtalare ska bli lika med ett.

Ange filtret på formen $y(n) = ...$ *(2p)*

4

Låt h vara en Gauss-kärna av storleken $N \times N$ som beskrivs av funktionen $h(x,y) = \alpha e^{-(x^2+y^2)/r^2}$, där α är en konstant satt så att summan av kärnans element ett: $\sum_{x=-N/2}^{N/2}\sum_{y=-N/2}^{N/2} h(x,y) = 1$. Låt vidare a och b vara två bilder, där $b = a * h$ (dvs b fås genom att filtrera a med kärnan h).

a Beskriv hur b förhåller sig till a med avseende på frekvensinnehåll, dvs vilken typ av filter är h? *(1p)*

b En ny bild c skapas som differensen $c = a - b$. Denna operation är ekvivalent med att filtrera a med en annan filterkärna g, dvs $c = a * g$. Bestäm $g(x,y)$. *(1p)*

c Vad är g för typ av filter? Förklara genom ett frekvensdomänsresonemnang med utgångspunkt från h. *(2p)*

5

Ett rullande medelvärdesfilter av längden p beskrivs av differensekvationen

$$y(n) = \sum_{k=0}^{p} x(n-k)$$

Det visar sig att detta filter kan implementeras mer effektivt som ett återkopplat filter:

$$y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-p-1)$$

a Visa att de två implementationerna är likvärdiga, och ta fram överföringsfunktionen $H(z)$ för den icke-återkopplade respektive återkopplade formen av filtret. *(2p)*

b Förklara med egna ord hur den återkopplade lösningen fungerar! *(2p)*

Lösningar

1

Multiplikation av två sinustoner ger upphov till två frekvenser, som är summan respektive skillnaden av ursprungsfrekvenserna. De två frekvenserna i spektrument $\pi/4(1000Hz)$ och $\pi/2(2000Hz)$ motsvarar alltså dessa, dock efter eventuell vikning.

Villkoren $\alpha < \frac{f_s}{2}$, $\beta < \frac{f_s}{2}$ ger att skillnadsfrekvensen $|\alpha - \beta|$ inte kommer vikas. $\alpha + \beta > \frac{f_s}{2}$ ger att summafrekvensen $\alpha + \beta$ kommer att vikas.

Antag att den lägre tonen (1000 Hz) är skillnadsfrekvensen, och 2000 Hz är den nedvikta summafrekvensen. Då kan vi skriva

$|\alpha - \beta| = 1000$ och $\alpha + \beta = 8000 - 2000 = 6000$.

Detta ger $\alpha = 2500Hz$, $\beta = 3500Hz$ eller vice versa (det spelar ingen roll vilken som är α resp. β).

Om den övre tonen är skillnadsfrekvensen får vi istället

$|\alpha - \beta| = 2000$ och $\alpha + \beta = 8000 - 1000 = 7000$

Vilket leder till $\alpha = 2500Hz$, $\beta = 4500Hz$. Men då faller villkoret $\beta < \frac{f_s}{2}$. Alltså är rätt svar

$$\alpha = 2500Hz, \beta = 3500Hz$$

2

1 Avklingande utan svängning, alltså pol på positiva reella axeln. Diagram e.

2 Instabil svängning, alltså poler utanför enhetscirkeln. Inget sådant diagram finns.

3 Avklingande svängning med en periodtid på 8 sample, alltså polvinkel $\pi/4$. Diagram b.

4 Avklingande svängning med en periodtid på 2 sampel, alltså polvinkel π. Diagram e.

5 Ej avklingande svängning med en periodtid på 4 sampel, pol på enhetscirkeln vid $\pi/2$. Diagram a.

3

a Vi har impulssvaret och söker överföringsfunktionen $H(z)$. Z-transformera!

Skriv om $h(n)$ på exponentialform m.h.a. Euler:

$$h(n) = u(n)e^{-\alpha n}\frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2} = \frac{u(n)}{2}(e^{(-\alpha + j\omega)n} + e^{(-\alpha - j\omega)n})$$

Nu kan varje term Z-transformeras med formeln för $u(n)a^n$ (se f.s.)

Sätt $a = e^{(-\alpha + j\omega)}$ och $b = e^{(-\alpha - j\omega)}$ så har vi

$$h(n) = \frac{1}{2}(u(n)a^n + u(n)b^n)$$

Vilket ger

$$H(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - bz^{-1}}\right)$$

Sätt på gemensamt bråkstreck:

$$H(z) = \frac{1}{2}\frac{2-(a+b)z^{-1}}{1-(a+b)z^{-1}+abz^{-2}} = \frac{1}{2}\frac{z^2-(a+b)z}{z^2-(a+b)z+ab}$$

Intemezzo:

$$a+b = e^{-\alpha+j\omega} + e^{-\alpha-j\omega} = e^{-\alpha}(e^{j\omega}+e^{-j\omega}) = 2e^{-\alpha}\cos\omega$$

$$ab = e^{-\alpha+j\omega}e^{-\alpha-j\omega} = e^{-2\alpha}$$

Byt ut $a+b$ och ab enl. ovanstående:

$$H(z) = \frac{z^2 - e^{-\alpha}\cos(\omega)z}{z^2 - 2e^{-\alpha}\cos(\omega)z + e^{-2\alpha}}$$

Slutligen sätter vi in $\alpha = 0.5$ och $\omega = \pi/16$ och får

$$H(z) = \frac{z^2 - 0.5949z}{z^2 - 1.1898z + 0.3679}$$

b Det sökta filtret - vi kan kalla det $G(z)$ - är inversen till $H(z)$ alltså

$$G(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{z^2 - 2e^{-\alpha}\cos(\omega)z + e^{-2\alpha}}{z^2 - e^{-\alpha}\cos(\omega)z} = \frac{1 - 2e^{-\alpha}\cos(\omega)z^{-1} + e^{-2\alpha}z^{-2}}{1 - e^{-\alpha}\cos(\omega)z^{-1}}$$

$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ ger

$$Y(z)(1 - e^{-\alpha}\cos(\omega)z^{-1}) = X(z)(1 - 2e^{-\alpha}\cos(\omega)z^{-1} + e^{-2\alpha}z^{-2})$$

transformera till tidsdomän:

$$y(n) - e^{-\alpha}\cos(\omega)y(n-1)) = (x(n) - 2e^{-\alpha}\cos(\omega)x(n-1) + e^{-2\alpha}x(n-2))$$

ger

$$y(n) = x(n) - 2e^{-\alpha}\cos(\omega)x(n-1) + e^{-2\alpha}x(n-2) + e^{-\alpha}\cos(\omega)y(n-1)$$

Med siffror insatta får vi

$$y(n) = x(n) - 1.1898x(n-1) + 0.3679x(n-2) + 0.5949y(n-1)$$

4

a

Gauss-kärnan är ett lågpassfilter, högfrekvent innehåll har tagits bort ur bilden, den har blivit "suddig".

b

$$c = a - a * h$$

Men $a = a * \delta$ där δ är en impuls:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad x = 0 \quad \text{och} \quad y = 0 \\ 0 & \quad annars \end{cases}$$

(Om man filtrerar en signal med en impuls får man tillbaks signalen själv.)

Då kan c skrivas som

$$c = a * \delta - a * h = a * (\delta - h)$$

vilket ger att $g = \delta - h$:

$$g(x,y) = \delta(x,y) - e^{-(x^2+y^2)/r^2}$$

c

Eftersom h är ett lågpassfilter, och δ lämnar bilden oförändrad, (släpper igenom alla frekvenser lika mycket), så måste $\delta - h$ innebära "hela bilden minus de låga frekvenserna", och alltså släppa igenom mera av de höga frekvenserna. g är alltså ett *högpassfilter*.

a

Skriv ut summan som

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \ldots + x(n-p-1) + x(n-p)$$

Detta uttryck gäller ju för alla n, vi kan t.ex. stoppa in $n-1$ och få

$$y(n-1) = x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + \ldots + x(n-p-2) + x(n-p-1)$$

Nu ser vi att det finns flera termer som är gemensamma ($x(n-1)$ t.o.m. $x(n-p-1)$

Om man subtraherar andra uttrycket från det första, kommer dessa att ta ut varandra och vi får

$$y(n) - y(n-1) = x(n) - x(n-p-1)$$

vilket ger

$$y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-p-1)$$

Q.E.D.

b

Den enkla tolkningen är att när vi flyttar vårt medelvärdesfönster ett steg, så utnyttjar vi det faktum att det nya medlevärdet är *nästan* samma som det förra - istället för att räkna om alltihop så lägger vi bara till den punkt som just kommit in i vårt rullande medelvärdesfönster (dvs $x(n)$)) och drar bort den som just åkt ut (dvs $x(n-p-1)$).