Mekanik för I1 och BD1, 5C1103, 5C1130, Kontrollskrivning
KS2, VT07, 2007 04 20, kl 08.00-10.00

Uppgift 1:

a) En *konstant* kraft $\boldsymbol{F}_0$ är den enda kraft som verkar på en partikel. Partikeln rör sig under viss tid från en punkt med lägesvektor $\boldsymbol{r}_1$ till en annan med lägesvektor $\boldsymbol{r}_2$. Beräkna kraftens arbete.
b) Om du har fått rätt i del a) beror arbetet inte på vilken väg mellan de två punkterna som partikeln tar. Vad kallar man krafter vars arbete har denna egenskap?
c) Skriv upp definitionerna av rörelsemängdsmoment $\boldsymbol{H}$ och kraftmoment $\boldsymbol{M}$ för *en* partikel respektive *en* kraft, med avseende på origo. Härled momentekvationen, $\dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{M}$, med hjälp av dessa och kraftekvationen.

Uppgift 2:

a) En partikel rör sig i xy-planet. Beräkna rörelsemängdsmomentet uttryckt i cylinderkoordinater!
b) En partikel rör sig i xy-planet under inverkan av en konservativ centralkraft med potentiell energi $V(r)$. Ställ upp energin för partikeln, $T+V=E$, uttryckt i cylinderkoordinater! Eliminera $\dot{\theta}$ ur uttrycket med hjälp av rörelsemängdsmomentet, $\boldsymbol{H}$s, bevarande, och visa på så sätt att,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{H^2}{2mr^2} + V(r) = E.$$

c) En partikel rör sig längs x-axeln under inverkan av kraften $F_x = -kx - c\dot{x}$. Vad är svängningstiden τ_n i det odämpade fallet ($c = 0$)? Beräkna svängningstiden τ_d för svagt dämpad svängning.

Varje uppgift ger högst 3 poäng. På denna KS 2 kan man högst få 6 poäng. Poängen adderas till poängen från KS 1. På båda kontrollskrivningar tillsammans kan man få maximalt 12 poäng. För godkänt fordras minst 4 poäng sammanlagt. (Notera att eventuell halv poäng i det sammanlagda resultatet avrundas neråt)

Tillåtna hjälpmedel: skriv- och ritdon inklusive suddgummi.

HE 07 04 20

Svar:

Uppgift 1:
a) Arbetet beräknas enligt:

$$U_{12} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}_0 \cdot \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}_0 \cdot [\boldsymbol{r}]_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} = \boldsymbol{F}_0 \cdot (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1).$$

b) Svar: En sådan kraft kallas *konservativ.*
c) Enligt definitionen gäller $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Då fås $\dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}$, vilket är momentekvationen.

Uppgift 2:
a) $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = r\boldsymbol{e}_r \times m(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z$.
b) Energin är

$$T + V = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)^2 + V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r).$$

Om man sätter $\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{e}_z$ i a) fås att $\dot{\theta} = H/mr^2$, där H är konstant. Ersätt $\dot{\theta}$ i energin med detta så fås det sökta uttrycket.
c) Svar: Det odämpade fallet ger $\tau_n = 2\pi/\omega_n = 2\pi\sqrt{m/k}$. I det svagt dämpade fallet är $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ där $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ där ζ definieras av $2\zeta\omega_n = c/m$. För räkningar se Nyberg, avsnitt 12.4.3.