Mekanik för I1 SG1109, Kontrollskrivning 2

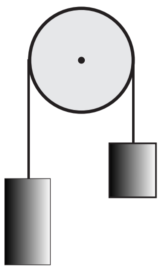
KS2, VT10, 2010 04 20, kl 08.00-10.00

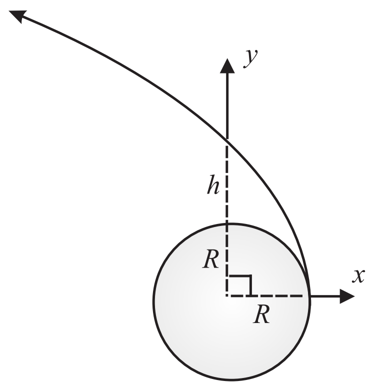
Uppgift 3:

a) En partikel rör sig längs en kurva som på parameterform ges av $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, där s är båglängden. Detta plus kännedom om funktionen $s(t)$ ger fullständig information om partikelns kinematik. Ta fram uttryck för partikelns hastighet och acceleration uttryckta i derivatorna $\dot{s}$ och $\ddot{s}$. Rita figur med ingående vektorer utsatta! Hastigheten skall härledas, accelerationen motiveras.

b) Över en lätt och lättroterad fix trissa löper en lina. I vardera änden hänger tyngder, på vänster sida massan $5m$ till höger massan $3m$, se figuren nedan. Beräkna accelerationen och spänningen i linan.

c) Definiera arbetet för en partikel som rör sig längs en kurva C från en punkt med lägesvektor $\boldsymbol{r}_1$ till en med $\boldsymbol{r}_2$, och visa att detta arbete är lika med ökningen i kinetisk energi.





Figur 1: Till vänster visas systemet i Uppgift 3 b. Figur till höger avser Uppgift 4 c.

Uppgift 4:

a) Definiera potentiell energi $V(\boldsymbol{r})$ för ett konservativt kraftfält $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. Beräkna potentiella energin för en partikel som sitter i ena änden av en fjäder med fjäderkonstant k, som är fix i den andra änden. Partikeln kan röra sig längs en x-axel parallell med fjädern.

b) En partikel rör sig i xy-planet. Inför cylinderkoordinater och ställ upp läge $\boldsymbol{r}$ och härled hastigheten $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ för partikeln samt beräkna rörelsemängdsmomentvektorn $\boldsymbol{H}$, allt uttryckt i cylinderkoordinater.

c) I cylinderkoordinater ges banan vid keplerrörelse av $r = \ell/(1+e\cos\theta)$, där r är avståndet från kraftcentrum och e kallas excentriciteten. Vad måste e vara om r precis kan bli oändligt (vid $\theta = \pi$)? Vilken höjd h har en satelliten när den passerar i zenit 90° bort på planeten i den horisontella avfyrningsrikningen, för detta e-värde? Från luftmotstånd och rotation bortses. Se figuren till höger.

Varje deluppgift ger noll, en halv, eller en (0, 0.5, 1) poäng. På denna KS 2 kan man högst få 6 poäng. På båda kontrollskrivningar tillsammans kan man få maximalt 12 poäng (halvtaliga poäng i totalsumman avrundas neråt). För godkänt fordras minst 4 poäng sammanlagt. *Glöm inte vektorstreck på vektorer!!*

Tillåtna hjälpmedel: skriv- och ritdon inklusive suddgummi.

Svar till KS2 för I1, VT10, 2010 04 20

Uppgift 3:
a) Detta finns på sidan 146-147, i Nybergs Mekanik Grundkurs, avsnitt 6.7.

b) Låt S vara spänningen i linan. Rörelseekvationerna blir då,

$$5m\ddot{x}_1 = 5mg - S,$$

$$3m\ddot{x}_2 = S - 3mg,$$

där x_1 är på neråtriktad x-axel för $5m$-massan och x_2 är på uppåtriktad x-axel för $3m$-massan. Dessutom gäller ju att,

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2,$$

eftersom linan har fix längd. Vi har tre ekvationer för tre obekanta som lätt ger Svaret:

$$\ddot{x}_1 = g/4, \quad S = (15/4)mg.$$

För full poäng fordras korrekta friläggningsfigurer.

c) Svar, första delen: formel (8.12) i Nybergs Mekanik Grundkurs, avsnitt 8.3. Svar, andra delen: Bokens härledning ges i formlerna (8.1)-(8.8), avsnitt 8.2. Alternativ härledning:

$$U_{1-2} = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t = (m/2)\int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,\dot{\boldsymbol{r}}^2\,\mathrm{d}t = T_2 - T_1.$$

Uppgift 4:
a) Enligt (8.23) i Nybergs Mekanik Grundkurs är $V(\boldsymbol{r}) = -\int^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, och denna integral är oberoende av vägen när $\boldsymbol{F}$ är konservativt. För fjäderkraften fås $V(x) = -\int_0^x -kx\,\mathrm{d}x = kx^2/2$, om origo väljs där fjädern är ospänd.

b) Läge $\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{e}_r$, hastighet $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta$. Rörelsemängdsmoment $\boldsymbol{H} = mr^2\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_z$.

c) Svar, första delen, $e = 1$. Med detta värde, sätt in $\theta = 0$ i banans ekvation; det ger $r = \ell/2 = R$ så att $\ell = 2R$. Med detta värde för ℓ, sätt in $\theta = \pi/2$ i banans ekvation. Det ger $r = \ell = 2R = R + h$. Alltså, Svar: $h = R$.

Om poängsättning

Allmänt gäller att varje deluppgift som är helt rätt besvarad ger 1 poäng.

Förkortningen *VS* står för problem med vektorstreck.

Vektorstorheter skall ha vektorstreck och skalära storheter skall ej ha vektorstreck. I allmänhet dras 0,5 poäng för denna feltyp.

OBS: I det sammanlagda KS-resultatet (KS1 + KS2) rundas halvpoäng av *nedåt* för beräkning av slutbetyg på teoridelen av tentamen.