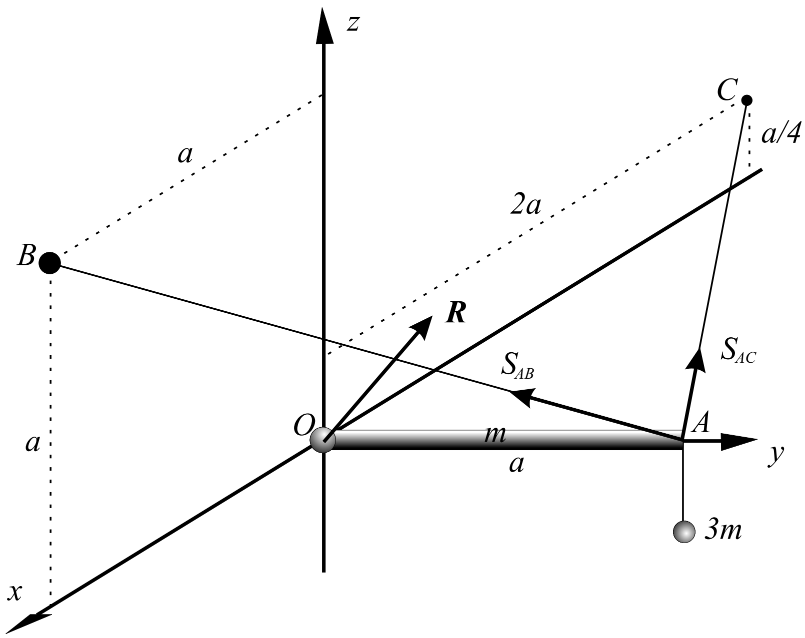
Mekanik för I, SG1109, Lösningar till problemtentamen, 2008 05 20

Uppgift 1: En bom med massan m och längden a är i sin ena ände O monterad i en kulled på en vertikal vägg. I den andra änden A är fäst två linor som går till fästpunkter B respektive C på väggen som håller bommen horisontell och vinkelrät mot väggen. I ett koordinatsystem där bommen är y-axel och z-axeln vertikal uppåt gäller att koordinaterna för B är $(a, 0, a)$ och koordinaterna för C är $(-2a, 0, a/4)$. I änden A är en vikt med massan $3m$ upphängd. Beräkna spänningarna i linorna och bommens kraft på kulleden.



Figur 1: Systemet i Uppgift 1. De tre sökta krafterna är utritade. Förutom dessa verkar tyngdkraften mg i bommens masscentrum och tyngdkraften $3mg$ i A.

Lösning 1: Trådarna går från $\boldsymbol{r}_A = (0, a, 0)$ till $\boldsymbol{r}_B = (a, 0, a)$ respektive $\boldsymbol{r}_C = (-2a, 0, a/4)$. Det betyder att spännkrafterna i trådarna kan skrivas,

$$S_{AB}\,\boldsymbol{e}_{AB} = S_{AB}\frac{(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)}{|\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A|} = S_{AB}\frac{(a, -a, a)}{\sqrt{3a^2}} = S_{AB}\frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}}, \tag{1}$$

$$S_{AC}\,\boldsymbol{e}_{AC} = S_{AC}\frac{(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A)}{|\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A|} = S_{AC}\frac{(-2a, -a, a/4)}{9a/4} = S_{AC}\frac{(-8, -4, 1)}{9}. \tag{2}$$

Kraftjämvikt kräver att, $\boldsymbol{R} + 4m\boldsymbol{g} + S_{AB}\,\boldsymbol{e}_{AB} + S_{AC}\,\boldsymbol{e}_{AC} = \boldsymbol{0}$, där $\boldsymbol{g} = -g\,\boldsymbol{e}_z$, vilket ger komponentekvationerna,

$$(x): \quad R_x + S_{AB}/\sqrt{3} - 8S_{AC}/9 = 0, \tag{3}$$

$$(y): \quad R_y - S_{AB}/\sqrt{3} - 4S_{AC}/9 = 0, \tag{4}$$

$$(z): \quad R_z - 4mg + S_{AB}/\sqrt{3} + S_{AC}/9 = 0. \tag{5}$$

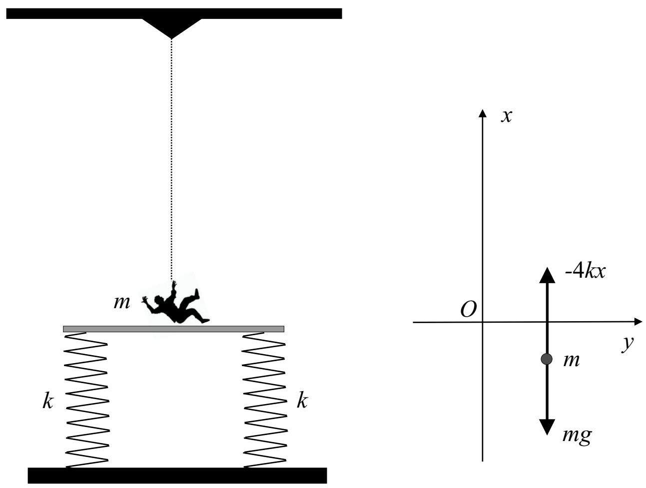
Momementjämvikt m.a.p. A, $\boldsymbol{M}_A = (-a\,\boldsymbol{e}_y) \times (-(mg/2)\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{0}$, ger två ekvationer:

$$M_{Ax}: \quad mga/2 - aR_z = 0, \tag{6}$$

$$M_{Az}: \quad aR_x = 0, \tag{7}$$

Dessa ekvationer ger att **Svar:** Spännkraftbeloppen är $S_{AB} = 28\sqrt{3}mg/9$ och $S_{AC} = 7mg/2$ och bommens kraft på kulleden är $-\boldsymbol{R} = -mg(0, 14/3, 1/2)$.

Uppgift 2: En man med massan m hänger i ett rep just över mitten av en horisontell kvadratisk platta monterad på fyra likadana fjädrar, en i vart och ett av hörnen. Fjädrarnas styvhet är k. Plattan och fjädrarna har försumbar massa jämfört med mannen. Mannen tappar nu taget om repet. Vilken maximal normalkraft från plattan utsätts mannen för?



Figur 2: Till vänster begynnelsesituationen i Uppgift 2. Krafter verkar endast i den vertikala riktningen. Till höger har mannen kommit till negativa x-värden. Där verkar tyngdkraft och fjäderkraft i de riktningar som visas till höger i figuren.

Lösning 2: Man kan använda energins bevarande eller rörelseekvationen. Energin är:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(4k)x^2 + mgx = E,$$

eftersom det är fyra fjädrar med k parallellkopplade. Begynnelsevärden när mannen just släppt repet är $x = 0, \dot{x} = 0$, så att $E = 0$. Normalkraften är kraften från plattan $N(x) = -4kx$ (för $x < 0$) och den är störst när $|x|$ når sitt största värde. Detta sker vid vändläget där $\dot{x} = 0$, igen. Ekvationen för vändlägena är alltså i detta fall:

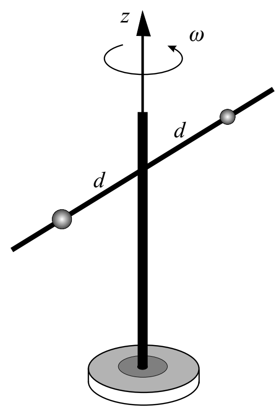
$$\frac{1}{2}(4k)x^2 + mgx = 0.$$

Detta ger att vändlägena finns vid $x = 0$ och $x = -mg/(2k)$. Det senare värdet ger maximal normalkraft, $N = -4k[-mg/(2k)]$, d.v.s.

Svar:

$$N_{\max} = 2mg$$

Uppgift 3: En rak horisontell stång är fäst på en rak vertikal stång som kan rotera kring vertikalen med försumbart friktionsmoment. När anordningen roterar med en vinkelhastighet ω har den rörelsemängdsmoment $H_{0z} = ma^2\omega$. Det betyder att den har tröghetsmoment $I_{0z} = ma^2$. Nu monteras två kulor, vardera med massa m, på tvärstången. De kan glida längs stången men hålls båda på plats med trådar på avståndet d från rotationsaxeln. Anordningen, med kulorna, ges nu vinkelhastigheten ω_1. Genom att dra i trådarna minskas avståndet till $d/3$ och fixeras där. Vad blir den nya vinkelhastigheten ω_2? Vad blir ändringen i kinetisk energi?



Figur 3: Bild till Uppgift 3

Lösning 3: Rörelsemängdsmomentet, H_z, m.a.p. z-axeln, är bevarat. När kulorna är på avståndet d från rotationsaxeln är rörelsemängdsmomentet,

$$H_z = ma^2\omega_1 + 2md^2\omega_1 = m(a^2 + 2d^2)\omega_1.$$

Kulorna dras sedan in mot rotationsaxeln utan att något yttre moment verkar på systemet. Rörelsemängdsmomentet när de stannat vid $d/3$ ges nu av,

$$H_z = ma^2\omega_2 + 2m(d/3)^2\omega_2 = m(a^2 + 2d^2/9)\omega_2.$$

Sätter man dessa lika kan man lösa ut att :

Svar 1:

$$\omega_2 = \frac{(a^2 + 2d^2)}{(a^2 + 2d^2/9)}\omega_1.$$

Kinetiska energin för en roterande stel kropp ges av $T = \frac{1}{2}I_z\omega^2$. I detta fall är

$$T_1 = \frac{1}{2}m(a^2 + 2d^2)\omega_1^2$$

och

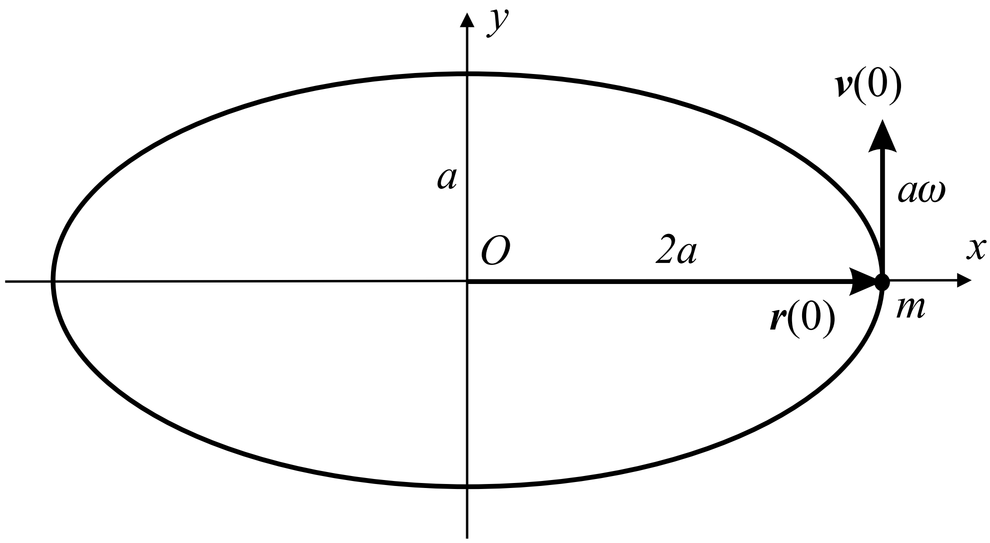
$$T_2 = \frac{1}{2}m(a^2 + 2d^2/9)\omega_2^2 = \frac{1}{2}m(a^2 + 2d^2/9)\left(\frac{(a^2 + 2d^2)}{(a^2 + 2d^2/9)}\omega_1\right)^2 = \frac{1}{2}m\frac{(a^2 + 2d^2)^2}{(a^2 + 2d^2/9)}\omega_1^2.$$

Man får då att ökningen i kinetisk energi, d.v.s. arbetet som uträttats när trådarna drog in kulorna, är:

Svar 2:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}m\frac{(a^2 + 2d^2)}{(a^2 + 2d^2/9)}\frac{16d^2}{9}\omega_1^2.$$

Uppgift 4: En partikel med massan m rör på ett glatt horisontalplan under inverkan av en centralkraft vars potentiella energi ges av $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Vid tiden $t = 0$ är läget $\boldsymbol{r}(0) = 2a\,\boldsymbol{e}_x$ och hastigheten $\boldsymbol{v}(0) = a\omega\,\boldsymbol{e}_y$, där $\omega^2 = k/m$. Beräkna största och minsta avståndet från Origo i den fortsatta rörelsen.



Figur 4: Begynnelsevärdena för partikelns läge och hastighet visas. Dessutom visas den verkliga banan. Man ser att svaren blir $r_{\min} = a$, och $r_{\max} = 2a$.

Lösning 4: Energin och rörelsemängdsmomentets z-komponent är bevarade. Med hjälp av begynnelsevärdena får vi att dessa har värdena:

$$E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(0) + \frac{1}{2}k\boldsymbol{r}^2(0) = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 + \frac{1}{2}k(2a)^2 = \frac{1}{2}m[a^2\omega^2 + (k/m)4a^2] = \frac{1}{2}m[a^2\omega^2 + \omega^2 4a^2] = \frac{5}{2}ma^2\omega^2$$

och

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{r}(0) \times m\boldsymbol{v}(0) = 2ma^2\omega\,\boldsymbol{e}_z = H_z\,\boldsymbol{e}_z.$$

Cylinderkoordinater ger också att

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}kr^2 \;=\; \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \omega^2 r^2)$$

och att $H_z = mr^2\dot{\theta}$. Då $H_z = 2ma^2\omega$ fås genast att

$$\dot{\theta} = 2(a/r)^2\omega$$

. Kombineras detta med energin fås,

$$E/m = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{4a^4\omega^2}{r^2} + \omega^2 r^2\right) = \frac{5}{2}a^2\omega^2.$$

Vid största och minsta r-värdena är $\dot{r} = 0$. Man får alltså ekvationen $\frac{1}{2}\left(\frac{4a^4\omega^2}{r^2} + \omega^2 r^2\right) = \frac{5}{2}a^2\omega^2$ för dessa r-värden. Multipliceras denna med r^2 erhålls en andragradsekvation i r^2. Den har rötterna $r^2 = \left(\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}\right)a^2$. Således fås

Svaren: $r_{\min} = a$, och $r_{\max} = 2a$.

Teoritentamen

Uppgift 5: Ange den fysikaliska dimensionen $\mathrm{M}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta}\mathrm{T}^{\gamma}$, d.v.s. ge värdena på α, β och γ, för följande mekaniska storheter:
a) Acceleration a,
b) Arbete U,
c) Rörelsemängdsmoment H_z,
d) Kraftmoment M_z,
e) Fjäderkonstant (styvhet) k,
f) Tröghetsmoment I_z.

Svar:
a) Acceleration $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = -2$,
b) Arbete $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 2$,
c) Rörelsemängdsmoment $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = -1$,
d) Kraftmoment $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = -2$,
e) Fjäderkonstant (styvhet) $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = -2$,
f) Tröghetsmoment $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 0$.

Uppgift 6: Härled (d.v.s. bevisa med en räkning) uttrycket för accelerationen i cylinderkooordinater. Det skall vara vektorstreck på vektorer.

Svar: Se boken. Resultatet skall vara $\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta + \ddot{z}\,\boldsymbol{e}_z$.

Uppgift 7: Utgå från definitionen av rörelsemängdsmoment $\boldsymbol{H}_O$ och kraftmoment $\boldsymbol{M}_O$ samt Newtons andra lag (kraftekvationen) och visa att $\dot{\boldsymbol{H}}_O = \boldsymbol{M}_O$ gäller (för en partikel). Det skall vara vektorstreck på vektorer.

Svar: Se Nybergs teoribok sidan 244.

Uppgift 8: En stel kropp roterar kring en fix z-axel. Kroppen har tröghetsmomentet I_z och vinkelhastigheten $\dot{\theta}$. Skriv upp dess rörelsemängdsmoment H_z och dess kinetiska energi T. Antag att kroppens vinkelacceleration är $\ddot{\theta}$. Ge ett uttryck för kraftmomentet M_z på kroppen.

Svar: $H_z = I_z\dot{\theta}$, $T = \frac{1}{2}I_z\dot{\theta}^2$, $M_z = I_z\ddot{\theta}$.

HE 2008 05 20