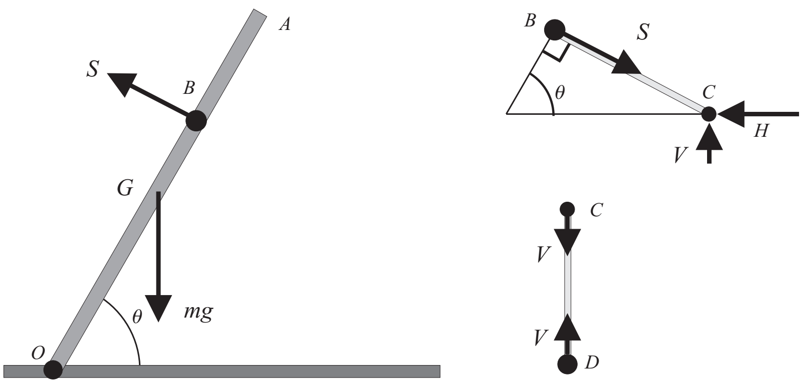
KTH Mekanik **2009 05 19**

Mekanik för I, SG1109, Lösningar till problemtentamen, 2009 05 19

Uppgift 1: En rak homogen stav OA med massan m och längden a är i änden O monterad i en fix glatt led. Via glatta leder i B och C samt en fix glatt led i D är den förenad med lätta stavar BC och CD, så att hela mekanismen kan röra sig i ett vertikalplan. Sträckan OB har längden b. Vinklarna $\angle OBC$ och $\angle ODC$ är räta. En yttre horisontell kraft H i C håller systemet i jämvikt. Beräkna H uttryckt i m, g, a, b, och vinkeln $\theta = \angle AOD$ som staven bildar med horisontalen OD.



Figur 1: Systemet i Uppgift 1. De lätta stavarna har frilagts och krafterna på dem har satts ut. På staven OA har reaktionskraften S från BC och tyngdkraften satts ut.

Lösning 1: Frilägg de lätta stavarna BC och CD. Dessa är så kallade tvåkraftskroppar – det verkar endast krafter i ändarna och dessa måste vara lika stora, motriktade och parallella med stavarna. Det betyder att kraften med belopp S i B måste vara lika med minus vektorsumman av krafterna som verkar i C. Notera att vinkeln vid C är $\pi/2-\theta$. De två ekvationer som behövs för att lösa problemet är horisontell kraftjämvikt för BC och momentjämvikt kring O för OA. Detta ger,

$$S\cos(\pi/2-\theta) - H = S\sin\theta - H = 0, \tag{1}$$

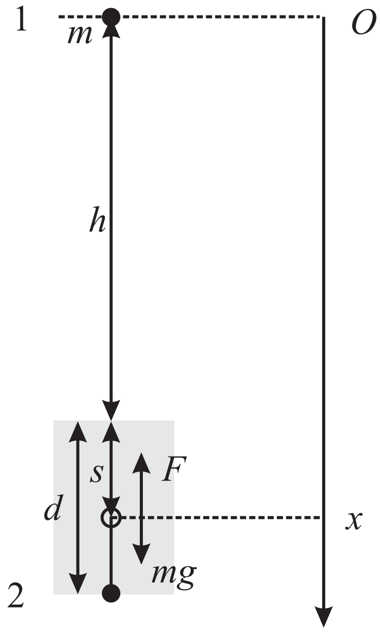
$$M_{Oz} = bS - mg\frac{a}{2}\cos\theta = 0. \tag{2}$$

Den första ekvationen ger $S = H/\sin\theta$. Sätts detta in i den andra kan H lösas ut.

Svar: Kraften är

$$H = mg\frac{a}{2b}\sin\theta\cos\theta \;=\; mg\frac{a}{4b}\sin(2\theta).$$

Uppgift 2: En partikel med massan m släpps från vila på en viss höjd över marken. Marken består av en speciell typ av kvicksand och som ger en bromsande kraft F på partikeln som är proportionell mot kuben på djupet s under markytan, d.v.s. $F = -ks^3$. Partikeln stannar på djupet $s = d$ under marken. Beräkna från vilken höjd h den släpptes uttryckt i m, g, k, och d.



Figur 2: Vi inför en nedåtriktad x-axel med origo vid startläget.

Lösning 2: Lagen om kinetiska energin ger

$$T_2 - T_1 = U_{1-2}$$

där T_1 är kinetiska energin i startläget och T_2 är kinetiska energi i slutläget. Då båda dessa är noll i detta problem återstår att räkna ut arbetet för krafterna på partikeln mellan de två lägena. Med den nedåtriktade x-axeln enligt figuren fås $s = x - h$ och således,

$$U_{1-2} = 0 = \int_0^{h+d} mg\,\mathrm{d}x - \int_h^{h+d} k(x-h)^3 \mathrm{d}x.$$

Detta ger

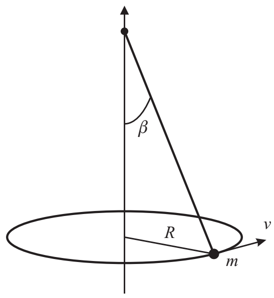
$$0 = mg(h+d) - \frac{k}{4}\left[(x-h)^4\right]_h^{h+d} \;=\; mg(h+d) - \frac{kd^4}{4}.$$

Den sökta höjden h kan lösas ur denna ekvation och då fås,

Svar:

$$h = \frac{kd^4}{4mg} - d \;=\; d\left(\frac{kd^3}{4mg} - 1\right).$$

Uppgift 3: En konisk partikelpendel består av en partikel med massa m som hänger i en tråd av fix längd. Partikeln rör sig under inverkan av tyngdkraften i en cirkelbana med radien R så att tråden sveper ut en kon med fix spets. Vinkeln mellan tråden och lodlinjen är β. Beräkna partikelns fart i cirkelbanan.



Figur 3: Bild till Uppgift 3

Lösning 3: Problemet finns löst i Christer Nyberg, Mekanik – Grundkurs, Exempel 7.11. I naturliga komponenter får man de två ekvationerna:

$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{v^2}{R} = S\sin\beta,$$

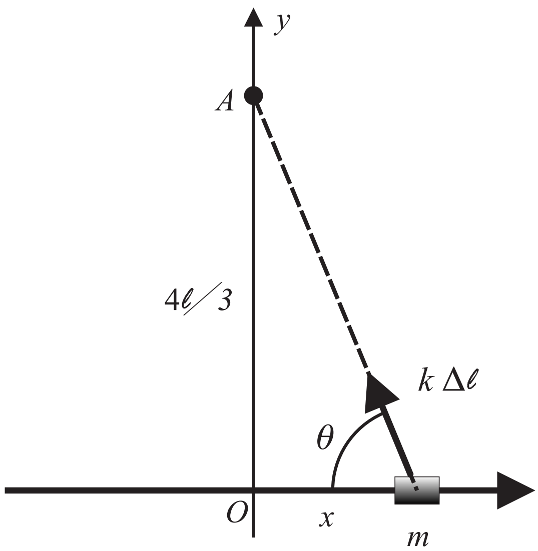
$$0 = F_b \qquad \Leftrightarrow \quad 0 = S\cos\beta - mg.$$

Här står S för kraften i tråden. Löses farten v ur dessa fås :

Svar:

$$v = \sqrt{Rg\tan\beta}.$$

Uppgift 4: En hylsa med massan m rör längs ett glatt horisontellt spår (x-axeln i figuren). Ett gummiband med styvhet k och med obelastad längd ℓ är fäst med sin ena ände i hylsan och med den andra änden i A vertikalt rakt över spåret på höjden $4\ell/3$. Antag att origo liggerr på x-axeln rakt under fästpunkten A. Ställ upp hylsans (exakta) rörelseekvation. Beräkna sedan hylsans vinkelfrekvens för små ($|x/\ell| \ll 1$) svängningar kring jämviktsläget.



Figur 4: Kraften från gummibandet är utsatt och är till sitt belopp $k\Delta\ell$ där $\Delta\ell$ är gummibandets förlängning.

Lösning 4: Pytagoras sats ger gummibandets längd när hylsan ligger vid x. Man får då att förlängningen av gummibandet är,

$$\Delta\ell = \sqrt{\left(\frac{4\ell}{3}\right)^2 + x^2} - \ell.$$

Kraften längs x-axeln fås genom att $-k\Delta\ell$ projiceras på x-axeln. Det finns också en normalkraft men dess komponent längs x-axeln är noll. Vinkeln θ i figuren uppfyller $\cos\theta = \frac{x}{\ell+\Delta\ell}$. För kraftekvationen i x-led fås således

Svar 1:

$$m\ddot{x} = -k\Delta\ell\cos\theta = -kx\left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{\left(\frac{4\ell}{3}\right)^2 + x^2}}\right).$$

Skriver man kraften i högerledet som

$$F_x = -kx\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^2}}\right)$$

ser man, då $|x/\ell|$ försummas jämfört med $4/3$ i roten, att kraftekvationen blir

$$m\ddot{x} = -\frac{k}{4}x.$$

Detta är en svängningsekvation med fjäderkonstanten $k/4$. Vinkelfrekvensen, som normal ges av standardformeln $\omega_n = \sqrt{k/m}$, ger då i detta fall att **Svar 2:** $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{4m}}$.

Teoritentamen

Uppgift 5: Visa hur man kan dela upp en vektor $\boldsymbol{A}$ i två komposanter: en $\boldsymbol{A}_\parallel$ som är parallell med och en $\boldsymbol{A}_\perp$ som är vinkelrät mot en annan vektor $\boldsymbol{B}$.

Svar 5: Detta finns i appendix A.7 i Christer Nyberg, Mekanik – Grundkurs längst ner på sidan 325. Byt bara enhetsvektorn $\boldsymbol{e}$ mot $\boldsymbol{e}_B = \boldsymbol{B}/|\boldsymbol{B}|$.

Uppgift 6: Ange, med motivering, det maximala antalet linjärt oberoende jämviktsekvationer per kropp som kan fås fram i det plana respektive det tredimensionella fallet.

Svar 6: I det plana fallet får man, $F_x = 0,\ F_y = 0,\ M_z = 0$, d.v.s. tre stycken ekvationer. I det tredimensionella blir det två vektorekvationer $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$, d.v.s. sex stycken skalära ekvationer per kropp.

Uppgift 7: Definiera potentiell energi och beräkna potentiella energifunktionen $V(r)$ för kraftfältet $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -kr\,\boldsymbol{e}_r(\theta)$. Här är r och θ planpolära (cylinder) koordinater. Var noggrann med vektor beteckningarna.

Svar 7: Man räknar precis som för gravitationskraften med den skillnaden att centralkraftens belopp är kr istället för GMm/r^2. Svaret skall vara $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ om nollpunkten sätts till origo ($r = 0$).

Uppgift 8: Rörelseekvationen $m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t)$ beskriver påtvingad odämpad svängning. Tag fram den allmänna lösningen och beskriv vad den innebär fysikaliskt.

Svar 8: Detta finns i Christer Nyberg, Mekanik – Grundkurs på nedre halvan av sidan 279.

HE 2009 05 19