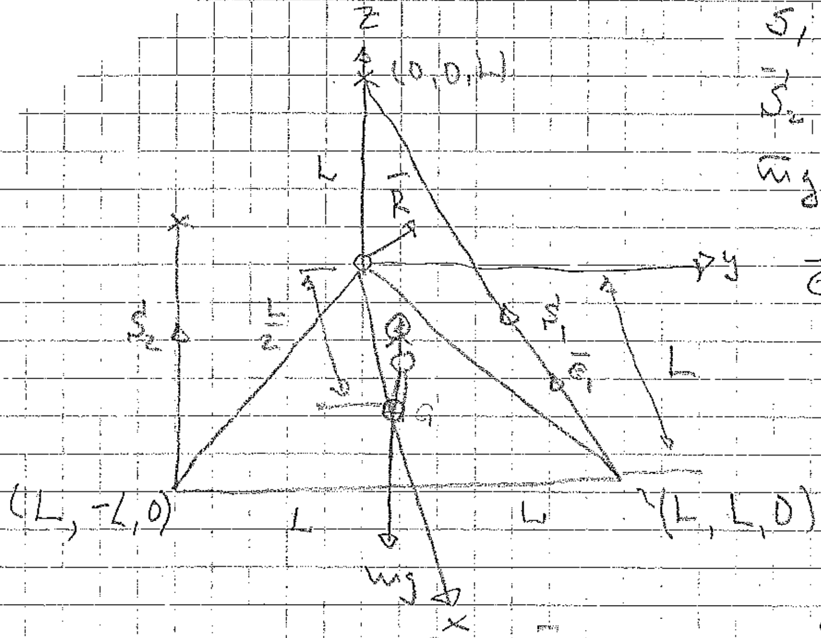
Lösning Problem 1
2010 08 23



$$\bar{S}_1 = S_1' \bar{e}_1$$

$$\bar{S}_2 = S_2' (0,0,1)$$

$$\bar{mg} = mg(0,0,-1)$$

$$\bar{e}_1 = \frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}}$$

$$\bar{M}_0 = \bar{0}$$

$$\bar{M}_0 = L\frac{S_1'}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + L S_2' \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{L}{2} mg \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_0 = L\frac{S_1'}{\sqrt{3}}(1, -1, 0) + L S_2'(-1, -1, 0) + \frac{L}{2} mg(0, 1, 0)$$

$$\bar{M}_0 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad L\frac{S_1}{\sqrt{3}} - L S_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2' = \frac{S_1'}{\sqrt{3}}$$

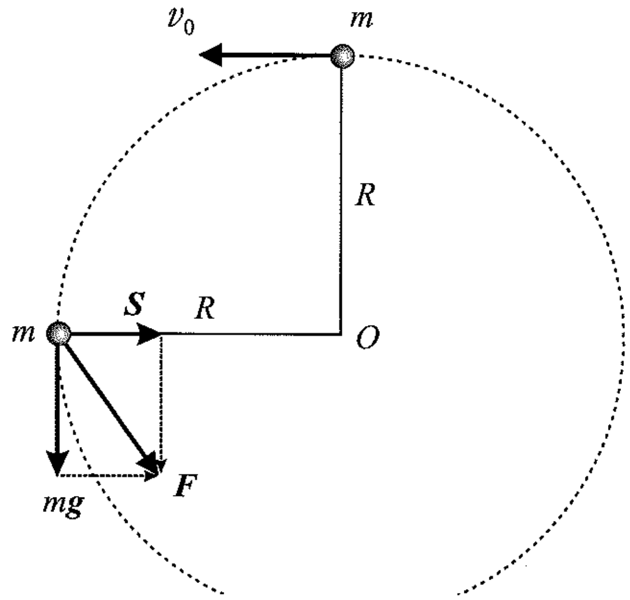
$$-L\frac{S_1'}{\sqrt{3}} - L S_2 + \frac{L}{2} mg = 0$$

$$2 S_2' = \frac{mg}{2}$$

$$\underline{S_2' = \frac{mg}{4}} \qquad \underline{S_1' = \frac{\sqrt{3}}{4} mg}$$

Lösning Problem 2
2010 08 23

Uppgift 2: En partikel med massa m är fäst i en tråd av längd R vars andra ände sitter fast i en fix punkt O. Med tråden sträckt och riktad vertikalt uppåt ges partikeln en horisontell fart $v_0 = \sqrt{gR}$. Beräkna beloppet av totala kraften $\boldsymbol{F}$ på partikeln när tråden blivit horisontell.



Figur 2: Systemet i Uppgift 2. Krafterna i det horisontella läget, tyngdkraften mg och spännkraften S, i tråden, är utsatta.

Lösning 2: Farten v för partikeln i det horisontella läget fås med hjälp av energins bevarande,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgR = \frac{1}{2}mv^2,$$

till,

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gR} = \sqrt{3gR},$$

då $v_0^2 = gR$. Kraftekvationen $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ i det horisontella läget, delas upp i naturliga komponenter. Då $\dot{s} = v$, och $\rho = R$, ger detta,

$$(e_t): \quad mg = m\ddot{s}, \tag{5}$$

$$(e_n): \quad S = m\frac{v^2}{R}. \tag{6}$$

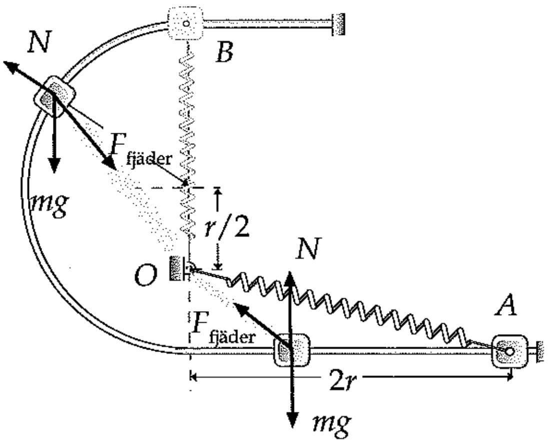
Med $v = \sqrt{3gR}$ fås alltså $S = F_n = 3mg$. För beloppet av kraften fås således $F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2} = \sqrt{(mg)^2 + (3mg)^2}$. Detta ger

Svar:

$$F = \sqrt{10}mg$$

Lösning Problem 3
2010 08 23

3.



Hylsan påverkas av tyngdkraften mg normalkraften N och fjäderkraften. Normalkraften är ständigt vinkelrät mot hastigheten och gör alltså inget arbete. Tyngdkraften mg och fjäderkraften är konservativa. Den mekaniska energin bevaras alltså. Låt referensnivån för den potentiella energin för tyngdkraften vara i cirkelns centrum. Potentiella energin för fjäderkraften är

$$V_{\text{fjäder}} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

där Δl är förlängningen räknat från den naturliga längden.

Lagen om den mekaniska energins bevarande:

$$\boxed{T_A + V_A = T_B + V_B} \tag{1}$$

ger

$$\frac{1}{2}mv_A^{\,2} - mg\cdot r + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(2r)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - r\right)^2 = \frac{1}{2}mv_B^{\,2} + mg\cdot r + \frac{1}{2}k\left(\frac{r}{2}\right)^2 \tag{2}$$

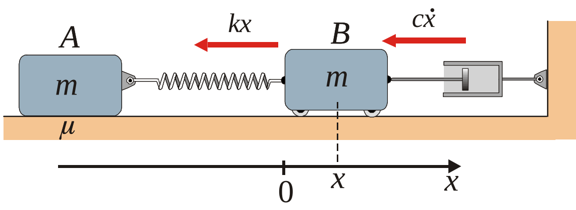
Förenkling ger

$$v_B^{\,2} = v_A^{\,2} - 4gr + \frac{kr^2}{m}\left[\frac{17}{4} + 1 - \sqrt{17} - \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \tag{3}$$

$$\underline{\underline{v_B = \sqrt{v_A^{\,2} - 4gr + \frac{kr^2}{m}\left(5 - \sqrt{17}\right)}}}$$

Lösning till Problem 4   2010 08 23

4)



1) Den största fjäderkraften uppnås vid en maximal förlängning av fjädern. Låt oss bestämma den genom att betrakta vagnens rörelse. Inför en x-axel med origo i punkten där fjädern är ospänd. Kraftekvationen för vagnen ger:

$$\mathbf{e}_x: \quad m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

Vilket ger en svängningsekvation $\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ eller med sedvanliga beteckningar $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$, där $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ och $2\zeta\omega_n = \frac{c}{m}$. Den karakteristiska ekvationen är $\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$ med rötterna $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$. Villkoret kritisk dämpning, $\zeta = 1$, ger en reel dubbelrot $\lambda_{1,2} = -\omega_n$ och den allmänna lösningen på formen $x(t) = \left(A + Bt\right)e^{-\omega_n t}$.

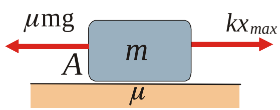
2) Låt oss bestämma integrationskonstanterna A och B med hjälp av begynnelsevillkoren.

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = Bte^{-\omega_n t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = Be^{-\omega_n t} - B\omega_n te^{-\omega_n t}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases} \Rightarrow \quad B = v_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_0 te^{-\omega_n t}$$

3) Bestäm nu $x_{\max}$. Vi har $\dot{x}(t) = v_0 e^{-\omega_n t} - v_0\omega_n te^{-\omega_n t} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1/\omega_n$ vilket ger $x_{\max} = x\left(t_1\right) = v_0 / e\omega_n$

4)



Vi kan nu betrakta partikeln A och ställa upp friktionsvillkoret på gränsen till glidning

$$\mu mg = kx_{\max} = k\frac{v_0}{e\omega_n} \quad \Rightarrow \quad v_0 = e\mu mg\frac{\omega_n}{k} = \underline{\underline{e\mu g\sqrt{\frac{m}{k}}}}$$