

Lösningar till problem i Klassisk fysik

v. 2012-01-18

Innehåll

1	Akustik	2
1.1	Övningsuppgifter	2
	Startpistol – F 2008-08-18 uppgift A1	2
	Kameraklick – IMT 2002-01-09 uppgift 5	2
	Snödämpning – I 2003-01-13 uppgift 3	3
	Högtalarkraft – BDMTI 2010-06-03 uppgift B2	5
1.2	Extrauppgifter	6
	Ohyra – MBDTI 2010-05-29 uppgift A4	6
	Maskinring – F 2009-05-18 uppgift A3	6
	Summer – I 2000-01-11 uppgift 3	6
	Ekolod – I 2002-03-05 uppgift 3	7
2	Elektrostatik	8
2.1	Övningsuppgifter	8
	Garnfragment – MTI 2001-04-27 uppgift 2	8
	Dipolsmuts – I 2001-10-26 uppgift 1	9
	Lysdiod – MT 1999-06-02 uppgift 2	9
	Åskmoln – F 2011-?	10
	Ringladdning – TMI 2008-03-10 uppgift B3	10
2.2	Extrauppgifter	11
	Bildrör1 – MT 1998-05-28 uppgift 1	11
	Elstängsel – F 2007-06-04 uppgift 4	11
	Rökgasrening – MTI 2002-08-23 uppgift 2	12
	Dipolattraktion – FCL 2009-06-04 uppgift B1	13

Övning 1

Akustik

1.1 Övningsuppgifter

Startpistol – F 2008-08-18 uppgift A1

Tema: Resultatmätning vid idrottsevenemang

Startpistol i krut-utförande är numera ett museiföremål, men användes ju länge. Vilken akustisk effekt avger en sådan om den hörs med 64 dB på 100 m avstånd.

Facit: 64 dB är det samma som $2.5 \mu\text{W}/\text{m}^2$. En sfär med radien 100 m har ytan $1.26 \cdot 10^5 \text{ m}^2$. Effekten blir då 0.31 W.

Ulf's lösning: Ljudintensitetsnivån $\beta = 64 \text{ dB}$ motsvarar intensiteten I där

$$\beta = \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \cdot 10 \text{ dB}, I_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$$
$$\Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\beta/10} = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ W}/\text{m}^2.$$

Ljudet är spritt över en sfär med radie $r = 100 \text{ m}$ och yta $A = 4\pi r^2 = 1.3 \cdot 10^5 \text{ m}^2$. Effekten som krävs för detta är

$$P = IA = 0.32 \text{ W}.$$

I detta fall försummas reflektion av ljud mot marken. Detta är rimligt om marken är "mjuk" (t.ex. gräs) och därför absorberar ljud. Om marken istället är asfalt kommer ljudet som är riktat nedåt reflekteras och hälften så stor effekt krävs eftersom ljudet sprids över en hälften så stor area.

Kameraklick – IMT 2002-01-09 uppgift 5

Tema: High-end-kameror

En elektronisk kamera är ju egentligen ljudlös (i varje fall när man tar bilden). Det har dock visat sig att många fotografer vill höra ett tydligt klickljud när bilden tas, och man har därför lagt in en liten sådan funktion (precis som på kassaapparater). Klickljudet åstadkommes av ett litet högtalarmembran som

är cirkulärt med radie 1 mm. Klickljudet ska höras med 40 dB på 1 m avstånd. Vilken hastighet måste membranet röra sig med?

Facit: Totala ljudeffekten blir på 1 m avst resp på membranet

$$P_{tot} = 4\pi(1 \text{ m})^2 \cdot 1 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 = \pi(1 \text{ mm})^2 \frac{v_{max}^2 Z}{2}$$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^6 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2}{430 \text{ kg/m}^2\text{s}}} = 0.014 \text{ m/s}$$

Ulfs lösning: Givet: Ljudintensitetsnivå $\beta = 40 \text{ dB}$ på avstånd $d = 1 \text{ m}$. Membranradie $r = 1 \text{ mm}$.

Sökt: Membranets maxhastighet v_{max} .

Intensiteten I_d på avstånd d ges av

$$I_d = I_0 \cdot 10^{\beta/10} \text{ dB} = \{I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2\} = 10^{-8} \text{ W/m}^2.$$

Denna är spridd över en sfär med radie d , vilket ger effekten

$$P = I_d A_d = I_d \cdot 4\pi d^2.$$

Effekten ska vara lika stor vid membranet, vilket där ger intensiteten

$$I_m = \frac{P}{A_m} = \frac{I_d 4\pi d^2}{\pi r^2} = 4I_d \frac{d^2}{r^2}.$$

Om vi antar att membranet rör sig sinusformat kan vi få ett uttryck för maxhastigheten.

$$x = a \sin(\omega t), v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos(\omega t) \Rightarrow v_{max} = a\omega$$

Detta kan vi relatera till intensiteten med

$$I_m = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 Z \Rightarrow v_{max} = \sqrt{a^2 \omega^2} = \sqrt{\frac{2I_m}{Z}} = \frac{d}{r} \sqrt{\frac{8I_d}{Z}}.$$

Med akustiska impedansen $Z = 420 \text{ kg/(m}^2\text{s)}$ för luft ger detta membranets maxhastighet $v_{max} = 14 \text{ mm/s}$.

Dimmensionskontroll:

$$\left[\frac{d}{r} \sqrt{\frac{8I_d}{Z}} \right] = \frac{\text{m}}{\text{m}} \sqrt{\frac{\text{W/m}^2}{\text{kg/(m}^2\text{s)}}} = \sqrt{\frac{\text{Ws}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{J}}{\text{kg}}} = \{E = \frac{1}{2}mv^2\} = \sqrt{\frac{\text{kg(m/s)}^2}{\text{kg}}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Enheten på svaret blev alltså m/s som den skulle.

Fråga: Varför tar vi bara hänsyn till ena sidan av membranet?

Snödämpning – I 2003-01-13 uppgift 3

Tema: Vinterkyla

När det snöar upplever man det ofta som att det blir tyst runt omkring. Detta kan delvis bero på att trafik mm minskar men också på att ljud absorberas i de

fallande snöflingorna. Detta gör att det vanliga avståndsberoendet ändras så att en extra exponentialfaktor tillkommer. Uttrycket för ljudets avståndsberoende blir

$$I = \frac{\text{Effekt från källan}}{4\pi r^2} e^{-ar}$$

Den vanliga regeln att ljudet minskar 6 dB då man fördubblar avståndet gäller inte längre nu. Hur många dB minskar ljudet om man går från 10 m till 20 m avstånd, respektive om man går från 20 m till 40 m avstånd?

$$a = 0.12/\text{m}$$

Facit: Skillnaden i ljudintensitetsnivå blir:

$$\beta_{r_2} - \beta_{r_1} = 10 \left[10 \log \left(\frac{\text{Effekt från källan}}{I_0 4\pi r_2^2} e^{-ar_2} \right) - 10 \log \left(\frac{\text{Effekt från källan}}{I_0 4\pi r_1^2} e^{-ar_1} \right) \right]$$

Med lite log-räkning fås sedan

$$\beta_{r_2} - \beta_{r_1} = 10 \left[10 \log \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} e^{a(r_1 - r_2)} \right) \right] = 15 \text{ dB resp } 10.4 \text{ dB.}$$

[Rättning: rätt svar är 11.2 respektive 16.4 dB.]

Ulf's lösning: Givet: $I = \frac{P}{4\pi r^2} e^{-ar}$, $a = 0.12/\text{m}$. Logaritmlagar:

$$\begin{aligned} \log(a) + \log(b) &= \log(ab) \\ \log(a) - \log(b) &= \log(a/b) \\ n \log(a) &= \log(a^n) \end{aligned}$$

Sökt: $\beta_1 - \beta_2$ och $\beta_2 - \beta_3$, där 1, 2 och 3 betecknar avstånden $r_1 = 10 \text{ m}$, $r_2 = 20 \text{ m}$ respektive $r_3 = 40 \text{ m}$.

Ljudintensitetsnivåskillnaden ges av

$$\beta_1 - \beta_2 = \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_0} \right) \cdot 10 \text{ dB} - \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_0} \right) \cdot 10 \text{ dB} = \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \cdot 10 \text{ dB.}$$

Vi behöver alltså kvoten mellan intensiteterna,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P}{4\pi r_1^2} e^{-ar_1}}{\frac{P}{4\pi r_2^2} e^{-ar_2}} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 e^{a(r_2 - r_1)}.$$

Detta ger

$$\beta_1 - \beta_2 = \log_{10} \left(\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 e^{a(r_2 - r_1)} \right) \cdot 10 \text{ dB} = \left(2 \log_{10} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + a(r_2 - r_1) \log_{10} e \right) \cdot 10 \text{ dB},$$

där den första termen i parantesen är det vanliga avståndsberoendet för ljudintensitetsnivå och den andra termen beror på dämpningen. Skillnaden i ljudnivå mellan 10 och 20 m är alltså

$$\beta_1 - \beta_2 = 11.2 \text{ dB},$$

och skillnaden mellan 20 och 40 m är

$$\beta_2 - \beta_3 = 16.4 \text{ dB}.$$

Matlab:

```
r1=10; r2=20; r3=40; a=.12;
beta1 = 10*(2*log10(r2/r1)+a*(r2-r1)*log10(exp(1)))
beta2 = 10*(2*log10(r3/r2)+a*(r3-r2)*log10(exp(1)))
```

Högtalarkraft – BDMTI 2010-06-03 uppgift B2

Tema: Robotdammsugare

Högtalaren ska avge 65 dB på 2 m avstånd. Vilken kraft utövar membranet maximalt på luften om membranytan är 10 cm^2 ? Antag att hela membranet rör sig lika mycket.

Facit: Effekten vid membranytan är $160 \text{ }\mu\text{W}$. Kraften blir då effekt genom hastighet = 5.9 mN . [Rättning: Maxkraften blir dubbla effekten/membran hastigheten = 12 mN]

Ulf's lösning: Givet: Ljudintensitetsnivå $\beta = 65 \text{ dB}$ på avstånd $d = 2 \text{ m}$. Membranyta $A_m = 10 \text{ cm}^2$.

Ljudintensiteten på avstånd d är

$$I_d = I_0 \cdot 10^{\beta/10} \text{ dB},$$

där $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Den är spridd över arean

$$A_d = 4\pi d^2,$$

vilket kräver effekten

$$P = A_d I_d.$$

Intensiteten vid membranet är då

$$I_m = \frac{P}{A_m} = \frac{4\pi d^2 I_d}{A_m}.$$

Detta ger maxtrycket,

$$I_m = \frac{p_{\max}^2}{2Z} \Rightarrow p_{\max} = \sqrt{2ZI_m} = \sqrt{\frac{8\pi Z d^2 I_d}{A_m}},$$

där den akustiska impedansen för luft är $Z = 420 \text{ kg/(m}^2\text{s)}$. Från detta kan vi beräkna maxkraften som membranet utövar på luften,

$$F = p_{\max} A_m = \sqrt{8\pi Z d^2 A_m I_0 \cdot 10^{\beta/10} \text{ dB}} = 12 \text{ mN}.$$

Matlab:

```
beta = 65; d = 2; Am = 10e-4; Z = 420; I0 = 1e-12;
F = sqrt(8*pi*Z*d^2*Am*I0*10^(beta/10))
```

1.2 Extrauppgifter

Ohyra – MBDTI 2010-05-29 uppgift A4

Tema: Växthus

Ohyra är alltid ett problem och på grund av debatten numera vill man helst inte använda besprutningsmedel. En metod är att använda stående ultraljudsvågor över plantorna som påverkar insekterna. Mellan två plattor alstras en stående ultraljudsvåg med frekvens 120 kHz. Partikelhastigheten ska ha ett maxvärde på 1.2 m/s. Vilken förskjutningsamplitud behövs?

Facit: Samband mellan hastighet och förskjutning är

$$s = s_0 \sin(\omega t - kx + \delta) \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = \omega s_0 \cos(\omega t - kx + \delta) \Rightarrow v_{\max} = \omega s_0,$$

och ur detta fås att $s_0 = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{v_{\max}}{2\pi f} = 1.6 \mu\text{m}$.

Maskinring – F 2009-05-18 uppgift A3

Tema: Arbetsplatssäkerhet

I en industrilokal är 20 identiska maskiner utplacerade i en ring (det finns ett skäl till det, men det tar för mycket utrymme att berätta varför). Tillsammans ger de upphov till ett buller på 78.6 dB i mitten av ringen. Hur mycket bullrar de om en maskin stannar?

Facit: Förändringsfaktorn = 19/20 vilket motsvarar -0,22 dB. Alltså 78,4 dB. Talet kan naturligtvis också beräknas genom att räkna ut intensiteten, multiplicera med 19/20 och sedan beräkna ljudintensitetsnivån.

Summer – I 2000-01-11 uppgift 3

Tema: Instrumentpaneler till tyngre fordon

En summer måste naturligtvis också finnas, för att alarmera om riktigt allvarliga fel. Vid första konstruktionsförsök visade sig denna ge för låg ljudintensitetsnivå (=54 dB). För att höja detta värde bytte man frekvens från 600 till 900 Hz, fördubblade membranytan, och ökade vibrationsamplituden med 50%. Vilken blev den nya ljudintensitetsnivån?

Facit: Effekten ut från summern blir $\text{Effekt} = \frac{a^2 \omega^2 Z A_{\text{membran}}}{2}$. Ökningen blir alltså $1.5^2 \times 1.5^2 \times 2 = 10.1$ vilket motsvarar ganska exakt 10 dB

Ulf's lösning: Givet: (1 före, 2 efter förändringarna) frekvenser $f_1 = 600$ Hz, $f_2 = 900$ Hz, membranarea $A_2 = 2A_1$, amplitud $a_2 = 1.5a_1$, ljudintensitetsnivå $\beta_1 = 54$ dB.

Sökt: β_2

Skillnaden i ljudintensitetsnivå är

$$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = \left(\log_{10} \left(\frac{I_{d2}}{I_0} \right) - \log_{10} \left(\frac{I_{d1}}{I_0} \right) \right) \cdot 10 \text{ dB} = \log_{10} \left(\frac{I_{d2}}{I_{d1}} \right) \cdot 10 \text{ dB}, \quad (1.1)$$

där I_{d1} och I_{d2} är intensiteterna på ett avstånd d där mätningen utfördes. Dessa intensiteter fås ur effekten från membranet med ekvation $I_d = \frac{P}{4\pi d^2}$. Effekten

fås från intensiteten I_m vid membranet som

$$P = AI_m = A \frac{1}{2} a^2 \omega^2 Z. \quad (1.2)$$

Detta ger

$$\frac{I_{d2}}{I_{d1}} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{A_2 a_2^2 \omega_2^2 Z}{A_1 a_1^2 \omega_1^2 Z} = 10.1, \quad (1.3)$$

vilket ger $\Delta\beta = \log_{10}(10.1) \cdot 10 \text{ dB} = 10 \text{ dB}$ och vidare

$$\beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta = 64 \text{ dB} \quad (1.4)$$

Ekolod – I 2002-03-05 uppgift 3

Tema: Teknologiska hjälpmedel för tankrederier

Alla båtar har ekolod. Sådana bygger på att man skickar ut ljudpulser direkt i vattnet och mäter när och vad som kommer tillbaka. Ljudsändaren består i princip av en metallbricka som vibrerar med en viss fix amplitud och frekvens. När man har den i luft ger den $50 \text{ }\mu\text{W/m}^2$ på 1 m avstånd. Vilken intensitet ger den på 1 m avstånd i vatten? (den är alltså nedsänkt i vattnet)

Facit: Intensiteten ges av $I = a^2 \omega^2 \rho c / 2$. Om amplitud och frekvens hålls konstanta är det bara ρc som ändras. För luft är denna $430 \text{ kg/m}^2\text{s}$ och för vatten $1.3 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^2\text{s}$ (se exvis sid 349 i Benson). Intensiteten förstärks alltså med en faktor som är kvoten mellan dessa dvs den blir 0.15 W/m^2

Övning 2

Elektrostatik

2.1 Övningsuppgifter

Garnfragment – MTI 2001-04-27 uppgift 2

Tema: Garnfornässörer

Den snabba mekaniska hanteringen av garn gör att en hel del trådfragment slits loss och virvlar runt i lokalen (=det dammar). Detta består ofta av trådar med längd runt en cm, diameter runt 20 μm , densitet ca 500 kg/m^3 och får en statisk laddning till beloppet motsvarande ca en miljon elektronladdningar per tråd. En idé vore kanske att attrahera dem elektriskt. Vilken storleksordning på elektrisk fältstyrka behövs för att dessa ska styras av ett elektriskt fält med 100 ggr större kraft än tyngdkraften på dem? Går detta tror Du?

Facit: $qE = 100mg \Rightarrow E = \frac{100 \cdot 1.57 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2}{10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}$ Vi vill alltså att fältet ska vara ca 10 MV/m, vilket ska jämföras med att genomslagsfältet i luft är 2 MV/m. I varje fall inte om kraften från E-fältet måste vara 100ggr kraften från tyngdkraftfältet.

Ulfs lösning: Fragmenten har en densitet $\rho = 500 \text{ kg/m}^3$ och volym

$$V = 1 \text{ cm} \cdot \frac{\pi}{4} (20 \mu\text{m})^2 = 3.1 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3, \quad (2.1)$$

vilket ger massan $m = \rho V$ och tyngdkraften

$$F_g = mg = \rho V g, \quad (2.2)$$

där $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ är tyngdaccelerationen.

Kraften från ett elektriskt fält E blir $F_E = 10^6 e E$ där $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ är elementarladdningen (= -elektronladdningen). Från $F_E = 100 F_g$ får vi då

$$10^6 e E = 100 \rho V g \Rightarrow E = \frac{\rho V g}{10^4 e} \approx 10 \text{ MV/m} \quad (2.3)$$

Luften har ett överslagsfält på ungefär 2 MV/m så denna fältstyrka skulle inte kunna upprätthållas.

Matlab:

```
rho = 500; g = 9.8; e = 1.60e-19;
V = 1e-2*pi/4*(20e-6)^2;
E = rho*V*g/(1e4*e)
```

Dipolsmuts – I 2001-10-26 uppgift 1

Tema: Skarvning av optiska fibrer

Före skarvning måste de bägge ändytorna behandlas så att de är helt rena. Detta kan ske genom kvarvarande lösa partiklar på ändytorna avlägsnas elektrostatiskt. Man utnyttjar då att de flesta tänkbara föroreningar är elektriska dipoler, med dipolmoment 10^{-29} Cm (storleksordning). Den kraft de sitter fast med är ca 10^{-20} N. Man vill inte använda fält starkare än 10^5 V/m. Fältet kommer från en trådladdning som i sammanhanget kan betraktas som lång. Hur nära måste man komma med trådladdningen (enbart storleksordning efterfrågas)?

Facit: Fältet från en trådladdning kan skrivas $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$

Kraften från detta fält på en dipol är $F_{\text{netto}} = \frac{p\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{pE}{r} \Rightarrow r = \frac{pE}{F_{\text{netto}}} = 10^{-4}$ m

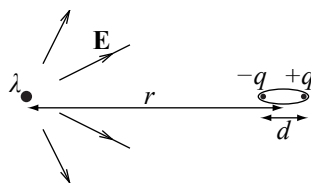
Ulf's lösning:

Givet: $p = qd = 10^{-29}$ Cm

$|F| = 10^{-20}$ N

$E = 10^5$ V/m

Sökt: r



E-fältet från en linjeladdning är

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Kraften på dipolen blir då

$$\begin{aligned} F &= F_- + F_+ = -qE(r) + qE(r+d) = q \left(\frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0(r-d/2)} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(r+d/2)} \right) \\ &= \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{-(r+d/2) + r - d/2}{(r-d/2)(r+d/2)} \underset{d \ll r}{\approx} \frac{-q\lambda d}{2\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{-Eqd}{r} = \frac{-Ep}{r}. \end{aligned}$$

Från detta kan vi få avståndet som ger rätt kraft och E-fält.

$$r = \frac{Ep}{|F|} = 0.1 \text{ mm}$$

Lysdiod – MT 1999-06-02 uppgift 2

Tema: Cyklism

Ett sätt att klara belysningen med lägre spänningskrav är att använda lysdioder. I en sådan alstras ljuset i ett mycket litet område där det statiska elektriska fältet varierar som $E_x(x) = E_0 \frac{1}{(x^2/x_0^2)+1}$ där $x_0 = 3.0 \mu\text{m}$ ($x = 0$ ligger precis i det mest lysande området). Hur stort blir det maximala värdet på E om spänningsfallet över området ska vara 1.2 V?

Facit: Spänningen ges av att $V = \int_{-\infty}^{\infty} E dr = \int E_0 \frac{1}{(x^2/x_0^2)+1} dx = \pi E_0 x_0 \Rightarrow E_0 = 127 \text{ kV/m}$

Ulf's lösning: Spänningen kan fås genom att integrera det elektriska fältet. Vi gör detta längs x -axeln eftersom det är x -komponenten av det elektriska fältet vi känner till. Integrationsgränserna är okända men mycket större än x_0 , så vi kan välja ∞ .

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} E_x dx = \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \frac{1}{(x^2/x_0^2)+1} dx \quad (2.4)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x/x_0 \\ dx = x_0 du \end{array} \right\} = E_0 x_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2+1} du \quad (2.5)$$

$$= E_0 x_0 [\arctan(u)]_{-\infty}^{\infty} = E_0 x_0 \pi \quad (2.6)$$

Med $U = 1.2 \text{ V}$ får vi styrkan på E-fältet

$$\max(E) = E_0 = \frac{U}{\pi x_0} = 130 \text{ kV/m}. \quad (2.7)$$

Åskmoln – F 2011-?

I åskmoln uppstår laddningsseparation, som i sin tur kan orsaka blixtar. I ett försök att ta reda på hur laddningsfördelningen uppstår mättes det elektriska fältet på två olika höjder vid botten i molnet. På 2150 m höjd var det 47.1 kV/m och på 2210 m höjd 36.4 kV/m. Fältet var i båda fallen riktade rakt uppåt. Hur stor är laddningstätheten i denna del av molnet?

Facit: Fältet antas vara vertikalt och bara bero av höjden. Vi använder en ytan på en vertikal cylinder S som gaussyta. Den undre ändytan är på höjd $h_1 = 2150 \text{ m}$ och den övre på $h_2 = 2210 \text{ m}$. E-fälten är på dessa ytor $E_1 = 47.1 \text{ kV/m}$ respektive $E_2 = 36.4 \text{ kV/m}$. Gauss sats ger

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

där Q är laddningen innesluten av ytan S . Bidraget till integralen från mantelytan är 0 eftersom fältet där är vinkelrätt mot ytan. Det som är kvar är alltså bara bidraget från de två ändytorna

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_2 A - E_1 A,$$

där A är arean på ändytorna. Laddningstätheten blir då

$$\rho = \frac{Q}{A(h_2 - h_1)} = \frac{\epsilon_0(E_2 A - E_1 A)}{A(h_2 - h_1)} = \epsilon_0 \frac{E_2 - E_1}{h_2 - h_1} = \underline{-1.6 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^3}.$$

Ringladdning – TMI 2008-03-10 uppgift B3

Tema: Visioner på utställningar

Det statiska fältet från ett laddat föremål beror ju väldigt mycket på föremålets form. Om föremålet är en ring och den är likformigt laddad blir ju fältet i mitten av ringen noll. Var utmed symmetriaxeln (uttryckt i ringens radie) blir fältet störst?

Facit: Om ringen har radien r och x betecknar avståndet utmed symmetriaxeln blir bidraget från en längdsnutt på axeln

$$dE = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)} \Rightarrow dE_{\text{parallell}} = \frac{\lambda x ds}{4\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}} \Rightarrow E = \frac{\lambda r x}{2\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Denna ska vi söka max till dvs derivera m.p. x och sätta derivatan $= 0$. Detta ger $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Ulf's lösning:

Av symmetriskäl kommer det elektriska fältet vara parallellt med ringens symmetrilinjen (x-axeln i figuren). Bidraget till x-komponenten av E-fältet från en liten del av ringen med laddning dq och vinkel $d\phi$ är

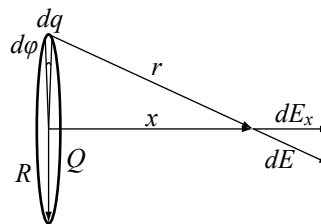
$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{Q \frac{d\phi}{2\pi}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{x}{r} = \frac{Q \frac{d\phi}{2\pi} x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Totala fältstyrkan får vi genom att integrera längs ringen,

$$E = \int_0^{2\pi} \frac{Q \frac{d\phi}{2\pi} x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Fältet är som starkast där derivatan är 0.

$$0 = \frac{dE}{dx} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x^2 + R^2)^{3/2} - x2x\frac{3}{2}(x^2 + R^2)^{1/2}}{(x^2 + R^2)^3} \\ \Rightarrow 0 = x^2 + R^2 - 3x^2 \Rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}}$$



2.2 Extrauppgifter

Bildrör1 – MT 1998-05-28 uppgift 1

Tema: Head up TV

Om den lilla TV'n innehåller ett bildrör (som en vanlig TV) kommer detta att behöva en elektron-kanon som ger elektroner med hög energi. Antag att de lämnar en negativ elektrod på potentialen -100 V utan hastighet och leds genom en ringelektrod med potentialen -10 V. Vilken fart har de då de passerar ringelektroden?

Facit: Elektronerna passerar ett spänningsfall på 90V och deras hastighet ges av

$$q_e V = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q_e V}{m}} = 5.6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Elstängsel – F 2007-06-04 uppgift 4

Tema: Skansen

Många djurparker (och bönder) använder elstängsel för att hålla djur och människor åtskilda. En del anser att djuren aldrig behöver nudda stängslet för

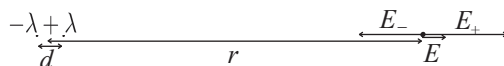
att hålla sig borta utan att de i stället känner fältet runt det. Antag att man har två trådar bredvid (i sidledd) varandra på ngn cm avstånd, trådarna har motsatt laddning (en plus och en minus). Ungefär hur mycket starkare är fältet på 3 dm avstånd jämfört med på 1 m?

Facit: Fältet från de bägge trådladdningar på avstånd a från varandra och på avstånd L från observatören = djuret blir då

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 L} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(L+a)} = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 L(L+a)} \approx \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 L^2}$$

Fältet avtar alltså som kvadraten på avståndet. På 3 dm blir fältet $(10/3)^2 = 11$ ggr starkare.

Ulfs lösning:



Det elektriska fältet på avstånd r enligt figuren ges av summan av fältet från den positiva och den negativa trådladdningen enligt ekvation (??) med $k = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$

$$E = E_+ - E_- = \frac{k}{r - d/2} - \frac{k}{r + d/2} \quad (2.8)$$

$$= k \frac{r + d/2 - (r - d/2)}{(r - d/2)(r + d/2)} = \frac{kd}{r^2 - d^2/4} \approx \frac{kd}{r^2} \quad (2.9)$$

eftersom $d \ll r$.

Kvoten mellan fältet på avstånd $r_1 = 0.3$ m och $r_2 = 1$ m blir då

$$\frac{E(r_1)}{E(r_2)} = \frac{kd/r_1^2}{kd/r_2^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 11 \quad (2.10)$$

Rökgasrening – MTI 2002-08-23 uppgift 2

Tema: Miljövärd

I elektrostatisk rökgasrening vill man skapa ett fält som är kraftigt inhomogent (för att attrahera dipolerna i röken). Detta görs ofta med hjälp av trådladdningar som löper i z-riktningen. Två positiva trådladdningar i linjerna genom (0,0)cm och (0,1)cm och två negativa genom (1,1)cm och (1,0) cm. Plotta fältets belopp utefter linjen (som ges på parameterform)

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 0.50 \text{ cm} \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Graderade axlar

Facit: y- och z-komp blir noll pga symmetri. Sätt sedan i beräkningen $1\text{cm} = 2a$

Fältet från de positiva laddningarna blir då

$$E_+ = 2 \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{x^2}{a^2 + x^2}$$

Den sista faktorn är trigonometrik för att få x-komp

Pss

$$E_+ = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{2a - x}{(2a - x)^2 + a^2}$$

Dessa ska sedan läggas ihop och plottas

Dipolattraktion – FCL 2009-06-04 uppgift B1

Tema: Proaktiv säkerhet i bilar

Hur beror kraften mellan två elektriska dipoler på avståndet mellan dem om de kan rotera fritt men inte förflytta sina tyngdpunkter?

Facit: De ställer först in sig på linje. Fältet från den ena blir då

$$E = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

Kraften på den andra dipolen kan då fås genom att bilda skillnaden mellan beloppen av krafterna på plusladdningen och på minusladdningen

$$\begin{aligned} \Delta F &= q(E(L) - E(L + d)) = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 L^3} - \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 (L + d)^3} \\ &= \frac{qp(L^3 + 3L^2d + 3Ld^2 + d^3)}{4\pi\epsilon_0 L^3(L + d)^3} - \frac{qpL^3}{4\pi\epsilon_0 L^3(L + d)^3} \\ &= \frac{3qpL^2d + \dots}{4\pi\epsilon_0 L^6} = \frac{3p^2}{4\pi\epsilon_0 L^3}, \end{aligned}$$

där småtermer pga $d \ll L$ försummas. Alltså omvänt prop mot avståndet upphöjt i 4.