KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till kontrollskrivning 1
Måndagen den 30 januari, 2012

1. a) Låt $f(t) = \sin t$ och definiera en funktion $z = f(x/y)$ av två variabler. Beräkna

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}.$$ **(2 p)**

b) Låt nu f vara en godtycklig, deriverbar funktion av en variabel och $z = f(x/y)$. Beräkna

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}.$$ **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Funktionen z är $z(x, y) = \sin\dfrac{x}{y}$ och kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{y} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{y} = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}.$$

Därmed är

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y} - \frac{xy}{y^2}\cos\frac{x}{y} = \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y} = 0.$$

b) I detta fall är $z(x, y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ och kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{y} = \frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{y} = -\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right).$$

Då får vi att

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{xy}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

2. Låt $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.
   a) Beskriv med ord samt skissera i en figur nivåkurvan $f(x, y) = 6$. **(1 p)**
   b) Beräkna grad $f(2, 1)$ och rita in den i din figur. **(1 p)**
   c) Avgör i vilken riktning, sett från $(2, 1)$, funktionen f ökar snabbast och beräkna riktningsderivatan av f i denna riktning. **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

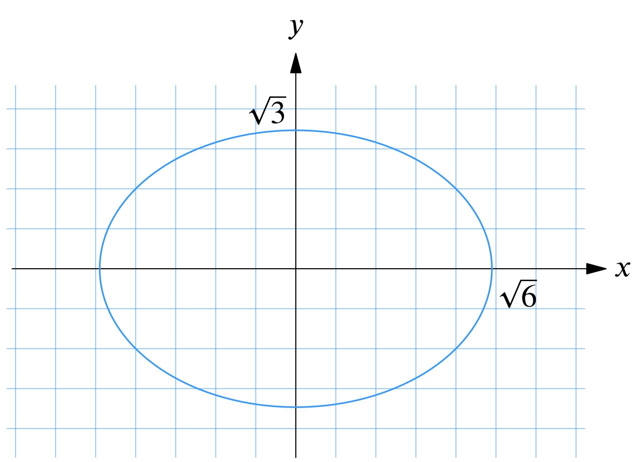
a) Nivåkurvan består av alla punkter (x, y) som uppfyller $f(x, y) = 6$, dvs.

$$x^2 + 2y^2 = 6.$$

Genom att skriva om ekvationen till

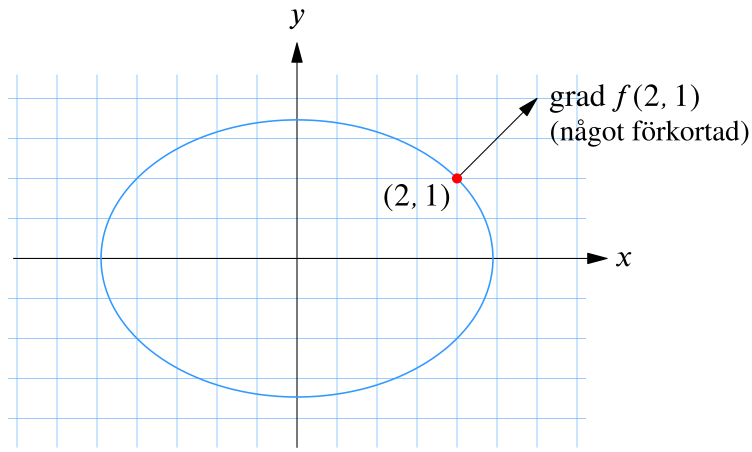
$$\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

ser vi att nivåkurvan är en ellips med medelpunkt i origo och halvaxlar $\sqrt{6}$ och $\sqrt{3}$ i x- resp. y-led.



b) Vi har att $f'_x = 2x$ och $f'_y = 4y$, vilket ger att

$$\text{grad}\, f(2, 1) = \left(f'_x(2, 1), f'_y(2, 1)\right) = (4, 4).$$



c) Funktionen f är ett polynom och är därför en differentierbar funktion vilket innebär att riktningsderivatan av f i riktningen $\hat{\boldsymbol{u}}$ kan beräknas med följande gradientformel

$$f'_{\hat{\boldsymbol{u}}}(2, 1) = \operatorname{grad} f(2, 1) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}.$$

Från högerledet ser vi att riktningsderivatan blir som störst när faktorerna i skalärprodukten pekar i samma riktning, dvs enhetsvektorn $\hat{\boldsymbol{u}}$ pekar i samma riktning som grad $f(2, 1)$,

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\operatorname{grad} f(2, 1)}{|\operatorname{grad} f(2, 1)|} = \frac{(4, 4)}{\sqrt{4^2 + 4^2}} = \frac{(4, 4)}{4\sqrt{2}} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}}.$$

I denna riktning är riktningsderivatan

$$f'_{\hat{\boldsymbol{u}}}(2, 1) = \operatorname{grad} f(2, 1) \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = (4, 4) \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

3. Arean av ett triangulärt vetefält ges av

$$A = \frac{ab \sin C}{2}.$$

Du har mätt upp sidorna a, b och vinkeln C, med en viss noggrannhet, till

$$a = 45 \pm 0{,}2 \text{ m},$$
$$b = 60 \pm 0{,}2 \text{ m},$$
$$C = \pi/3 \pm 0{,}05 \text{ radianer}.$$

a) Linjarisera areafunktionen A kring $a = 45$, $b = 60$ och $C = \pi/3$. **(1 p)**
b) Använd linjariseringen för att bestämma arean med felgränser. **(2 p)**
c) Vilket av mätfelen i variabeln a eller b påverkar resultatet mest? **(1 p)**

a) Linjariseringsformeln lyder

$$
\begin{aligned}
&A(45+\Delta a, 60+\Delta b, \pi/3+\Delta C) \\
&\qquad = A(45, 60, \pi/3) + \frac{\partial A}{\partial a}(45, 60, \pi/3)\Delta a + \frac{\partial A}{\partial b}(45, 60, \pi/3)\Delta b \\
&\qquad\qquad + \frac{\partial A}{\partial C}(45, 60, \pi/3)\Delta C + \text{Restterm},
\end{aligned}
$$

där

$$
\begin{aligned}
A(45, 60, \pi/3) &= \frac{45\cdot 60\cdot \sin(\pi/3)}{2} = 675\sqrt{3}, \\
\frac{\partial A}{\partial a}(45, 60, \pi/3) &= \frac{\partial}{\partial a}\frac{ab\sin C}{2}\Bigg|_{\substack{a=45\\ b=60\\ C=\pi/3}} = \frac{b\sin C}{2}\Bigg|_{\substack{a=45\\ b=60\\ C=\pi/3}} = 15\sqrt{3}, \\
\frac{\partial A}{\partial b}(45, 60, \pi/3) &= \frac{\partial}{\partial b}\frac{ab\sin C}{2}\Bigg|_{\substack{a=45\\ b=60\\ C=\pi/3}} = \frac{a\sin C}{2}\Bigg|_{\substack{a=45\\ b=60\\ C=\pi/3}} = \frac{45\sqrt{3}}{4}, \\
\frac{\partial A}{\partial C}(45, 60, \pi/3) &= \frac{\partial}{\partial C}\frac{ab\sin C}{2}\Bigg|_{\substack{a=45\\ b=60\\ C=\pi/3}} = \frac{ab\cos C}{2}\Bigg|_{\substack{a=45\\ b=60\\ C=\pi/3}} = 675.
\end{aligned}
$$

Alltså är

$$
\begin{aligned}
&A(45+\Delta a, 60+\Delta b, \pi/3+\Delta C) \\
&\qquad = 675\sqrt{3} + 15\sqrt{3}\Delta a + \tfrac{45}{4}\sqrt{3}\,\Delta b + 675\Delta C + \text{Restterm}.
\end{aligned}
$$

b) Från uppgiften vet vi att

$$
|\Delta a| \le 0{,}2, \quad |\Delta b| \le 0{,}2, \quad |\Delta C| \le 0{,}05,
$$

och försummar vi resttermen i linjariseringen får vi att

$$
\begin{aligned}
\left| A - 675\sqrt{3} \right| &\approx \left| 15\sqrt{3}\Delta a + \frac{45\sqrt{3}}{4}\Delta b + 675\Delta C \right| \\
&\le 15\sqrt{3}\,|\Delta a| + \frac{45\sqrt{3}}{4}\,|\Delta b| + 675\,|\Delta C| \\
&\le 15\sqrt{3}\cdot 0{,}2 + \frac{45\sqrt{3}}{4}\cdot 0{,}2 + 675\cdot 0{,}05 \\
&= 5{,}25\sqrt{3} + 33{,}75.
\end{aligned}
$$

Arean är alltså

$$
A = 675\sqrt{3} \pm \left(5{,}25\sqrt{3} + 33{,}75\right)\ \text{m}^2.
$$

c) I feltermen

$$15\sqrt{3}\,|\Delta a| + \frac{45\sqrt{3}}{4}\,|\Delta b| + 675\,|\Delta C|$$

är $15\sqrt{3} > \frac{45}{4}\sqrt{3}$ och det gör att ett mätfel i a påverkar resultatet mer än ett lika stort mätfel i b.

Svar:

1. a) 0
   b) 0
2. a) En ellips med medelpunkt i origo och halvaxlar $\sqrt{6}$ och $\sqrt{3}$ i x- resp. y-led. (Se lösningen för figur.)
   b) grad $f(2,1) = (4,4)$ (Se lösningen för figur.)
   c) $\hat{\boldsymbol{u}} = (1,1)/\sqrt{2}$ och $f'_{\hat{\boldsymbol{u}}}(2,1) = 4\sqrt{2}$
3. a) $A(45+\Delta a, 60+\Delta b, \pi/3+\Delta C) = 675\sqrt{3}+15\sqrt{3}\Delta a+\frac{45}{4}\sqrt{3}\,\Delta b+675\Delta C+\text{Restterm}$
   b) $A = 675\sqrt{3} \pm \left(5{,}25\sqrt{3} + 33{,}75\right)\ \text{m}^2$
   c) a