

Lösningar till problem i Klassisk fysik

v. 2012-01-27

Innehåll

1 Akustik	3
1.1 Övningsuppgifter	3
Startpistol – F 2008-08-18 uppgift A1	3
Kameraklick – IMT 2002-01-09 uppgift 5	3
Snödämpning – I 2003-01-13 uppgift 3	4
Högtalarkraft – BDMTI 2010-06-03 uppgift B2	6
1.2 Extrauppgifter	7
Ohyra – MBDTI 2010-05-29 uppgift A4	7
Maskinring – F 2009-05-18 uppgift A3	7
Summer – I 2000-01-11 uppgift 3	7
Ekolod – I 2002-03-05 uppgift 3	8
2 Elektrostatik	9
2.1 Övningsuppgifter	9
Garnfragment – MTI 2001-04-27 uppgift 2	9
Dipolsmuts – I 2001-10-26 uppgift 1	10
Lysdiod – MT 1999-06-02 uppgift 2	10
Åskmoln – F 2011-?	11
Ringladdning – TMI 2008-03-10 uppgift B3	11
2.2 Extrauppgifter	12
Bildrör1 – MT 1998-05-28 uppgift 1	12
Elstängsel – F 2007-06-04 uppgift 4	12
Rökgasrening – MTI 2002-08-23 uppgift 2	13
Dipolattraktion – FCL 2009-06-04 uppgift B1	14
3 Kondensatorer	15
3.1 Övningsuppgifter	15
Oljenivåmätare – I 2002-03-05 uppgift 1	15
Gnista – I 2003-01-13 uppgift 1	16
Kondensatormikrofon – MT 2005-06-01 uppgift 2	17
Givarsignal – I 2005-01-11 uppgift 2	18
Pixelkondensator – I 2002-01-09 uppgift 2	18
3.2 Extrauppgifter	18
Alkometer – FCL 2009-06-04 uppgift A2	18

Koaxialkabel – I 1999-10-22 uppgift 4	18
Tjuvstartssensor – MTI 2008-08-18 uppgift A2	19
Plattkondensator – FBDMTI 2009-08-17 uppgift A4	20
Cylinderkondensator – FBDMTI 2009-08-17 uppgift B2	20

Övning 1

Akustik

1.1 Övningsuppgifter

Startpistol – F 2008-08-18 uppgift A1

Tema: Resultatmätning vid idrottsevenemang

Startpistol i krut-utförande är numera ett museiföremål, men användes ju länge. Vilken akustisk effekt avger en sådan om den hörs med 64 dB på 100 m avstånd.

Facit: 64 dB är det samma som $2.5 \mu\text{W}/\text{m}^2$. En sfär med radien 100 m har ytan $1.26 \cdot 10^5 \text{ m}^2$. Effekten blir då 0.31 W.

Ulfs lösning: Ljudintensitetsnivån $\beta = 64 \text{ dB}$ motsvarar intensiteten I där

$$\beta = \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \cdot 10 \text{ dB}, \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$$
$$\Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\beta/10} \text{ dB} = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ W}/\text{m}^2.$$

Ljudet är spritt över en sfär med radie $r = 100 \text{ m}$ och yta $A = 4\pi r^2 = 1.3 \cdot 10^5 \text{ m}^2$. Effekten som krävs för detta är

$$P = IA = 0.32 \text{ W}.$$

I detta fall försummas reflektion av ljud mot marken. Detta är rimligt om marken är "mjuk" (t.ex. gräs) och därför absorberar ljud. Om marken istället är asfalt kommer ljudet som är riktat nedåt reflekteras och hälften så stor effekt krävs eftersom ljudet sprids över en hälften så stor area.

Kameraklick – IMT 2002-01-09 uppgift 5

Tema: High-end-kameror

En elektronisk kamera är ju egentligen ljudlös (i varje fall när man tar bilden). Det har dock visat sig att många fotografer vill höra ett tydligt klickljud när bilden tas, och man har därför lagt in en liten sådan funktion (precis som på kassaapparater). Klickljudet åstadkommes av ett litet högtalarmembran som

är cirkulärt med radie 1 mm. Klickljudet ska höras med 40 dB på 1 m avstånd. Vilken hastighet måste membranet röra sig med?

Facit: Totala ljudeffekten blir på 1 m avst resp på membranet

$$P_{tot} = 4\pi(1 \text{ m})^2 \cdot 1 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 = \pi(1 \text{ mm})^2 \frac{v_{max}^2 Z}{2}$$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^6 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2}{430 \text{ kg/m}^2\text{s}}} = 0.014 \text{ m/s}$$

Ulfs lösning: Givet: Ljudintensitetsnivå $\beta = 40 \text{ dB}$ på avstånd $d = 1 \text{ m}$. Membranradie $r = 1 \text{ mm}$.

Sökt: Membranets maxhastighet v_{max} .

Intensiteten I_d på avstånd d ges av

$$I_d = I_0 \cdot 10^{\beta/10} \text{ dB} = \{I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2\} = 10^{-8} \text{ W/m}^2.$$

Denna är spridd över en sfär med radie d , vilket ger effekten

$$P = I_d A_d = I_d \cdot 4\pi d^2.$$

Effekten ska vara lika stor vid membranet, vilket där ger intensiteten

$$I_m = \frac{P}{A_m} = \frac{I_d 4\pi d^2}{\pi r^2} = 4I_d \frac{d^2}{r^2}.$$

Om vi antar att membranet rör sig sinusformat kan vi få ett uttryck för maxhastigheten.

$$x = a \sin(\omega t), v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos(\omega t) \Rightarrow v_{max} = a\omega$$

Detta kan vi relatera till intensiteten med

$$I_m = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 Z \Rightarrow v_{max} = \sqrt{a^2 \omega^2} = \sqrt{\frac{2I_m}{Z}} = \frac{d}{r} \sqrt{\frac{8I_d}{Z}}.$$

Med akustiska impedansen $Z = 420 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$ för luft ger detta membranets maxhastighet $v_{max} = 14 \text{ mm/s}$.

Dimmensionskontroll:

$$\left[\frac{d}{r} \sqrt{\frac{8I_d}{Z}} \right] = \frac{\text{m}}{\text{m}} \sqrt{\frac{\text{W/m}^2}{\text{kg}/(\text{m}^2\text{s})}} = \sqrt{\frac{\text{Ws}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{J}}{\text{kg}}} = \{E = \frac{1}{2}mv^2\} = \sqrt{\frac{\text{kg}(\text{m/s})^2}{\text{kg}}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Enheten på svaret blev alltså m/s som den skulle.

Fråga: Varför tar vi bara hänsyn till ena sidan av membranet?

Snödämpning – I 2003-01-13 uppgift 3

Tema: Vinterkyla

När det snöar upplever man det ofta som att det blir tyst runt omkring. Detta kan delvis bero på att trafik mm minskar men också på att ljud absorberas i de

fallande snöflingorna. Detta gör att det vanliga avståndsberoendet ändras så att en extra exponentialfaktor tillkommer. Uttrycket för ljudets avståndsberoende blir

$$I = \frac{\text{Effekt från källan}}{4\pi r^2} e^{-ar}$$

Den vanliga regeln att ljudet minskar 6 dB då man fördubblar avståndet gäller inte längre nu. Hur många dB minskar ljudet om man går från 10 m till 20 m avstånd, respektive om man går från 20 m till 40 m avstånd?

$$a = 0.12/\text{m}$$

Facit: Skillnaden i ljudintensitetsnivå blir:

$$\beta_{r_2} - \beta_{r_1} = 10 \left[10 \log \left(\frac{\text{Effekt från källan}}{I_0 4\pi r_2^2} e^{-ar_2} \right) - 10 \log \left(\frac{\text{Effekt från källan}}{I_0 4\pi r_1^2} e^{-ar_1} \right) \right]$$

Med lite log-räkning fås sedan

$$\beta_{r_2} - \beta_{r_1} = 10 \left[10 \log \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} e^{a(r_1 - r_2)} \right) \right] = 15 \text{ dB resp } 10.4 \text{ dB.}$$

[Rättning: rätt svar är 11.2 respektive 16.4 dB.]

Ulf's lösning: Givet: $I = \frac{P}{4\pi r^2} e^{-ar}$, $a = 0.12/\text{m}$. Logaritmlagar:

$$\begin{aligned} \log(a) + \log(b) &= \log(ab) \\ \log(a) - \log(b) &= \log(a/b) \\ n \log(a) &= \log(a^n) \end{aligned}$$

Sökt: $\beta_1 - \beta_2$ och $\beta_2 - \beta_3$, där 1, 2 och 3 betecknar avstånden $r_1 = 10$ m, $r_2 = 20$ m respektive $r_3 = 40$ m.

Ljudintensitetsnivåskillnaden ges av

$$\beta_1 - \beta_2 = \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_0} \right) \cdot 10 \text{ dB} - \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_0} \right) \cdot 10 \text{ dB} = \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \cdot 10 \text{ dB.}$$

Vi behöver alltså kvoten mellan intensiteterna,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P}{4\pi r_1^2} e^{-ar_1}}{\frac{P}{4\pi r_2^2} e^{-ar_2}} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 e^{a(r_2 - r_1)}.$$

Detta ger

$$\beta_1 - \beta_2 = \log_{10} \left(\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 e^{a(r_2 - r_1)} \right) \cdot 10 \text{ dB} = \left(2 \log_{10} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + a(r_2 - r_1) \log_{10} e \right) \cdot 10 \text{ dB,}$$

där den första termen i parantesen är det vanliga avståndsberoendet för ljudintensitetsnivån och den andra termen beror på dämpningen. Skillnaden i ljudnivå mellan 10 och 20 m är alltså

$$\beta_1 - \beta_2 = 11.2 \text{ dB,}$$

och skillnaden mellan 20 och 40 m är

$$\beta_2 - \beta_3 = 16.4 \text{ dB.}$$

Matlab:

```
r1=10; r2=20; r3=40; a=.12;
beta1 = 10*(2*log10(r2/r1)+a*(r2-r1)*log10(exp(1)))
beta2 = 10*(2*log10(r3/r2)+a*(r3-r2)*log10(exp(1)))
```

Högtalarkraft – BDMTI 2010-06-03 uppgift B2

Tema: Robotdammsugare

Högtalaren ska avge 65 dB på 2 m avstånd. Vilken kraft utövar membranet maximalt på luften om membranytan är 10 cm²? Antag att hela membranet rör sig lika mycket.

Facit: Effekten vid membranytan är 160 μW. Kraften blir då effekt genom hastighet = 5.9 mN. [Rättning: Maxkraften blir dubbla effekten/membranhastigheten = 12 mN]

Ulfs lösning: Givet: Ljudintensitetsnivå $\beta = 65$ dB på avstånd $d = 2$ m. Membranyta $A_m = 10 \text{ cm}^2$.

Ljudintensiteten på avstånd d är

$$I_d = I_0 \cdot 10^{\beta/10} \text{ dB,}$$

där $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Den är spridd över arean

$$A_d = 4\pi d^2,$$

vilket kräver effekten

$$P = A_d I_d.$$

Intensiteten vid membranet är då

$$I_m = \frac{P}{A_m} = \frac{4\pi d^2 I_d}{A_m}.$$

Detta ger maxtrycket,

$$I_m = \frac{p_{\max}^2}{2Z} \Rightarrow p_{\max} = \sqrt{2ZI_m} = \sqrt{\frac{8\pi Z d^2 I_d}{A_m}},$$

där den akustiska impedansen för luft är $Z = 420 \text{ kg/(m}^2\text{s)}$. Från detta kan vi beräkna maxkraften som membranet utövar på luften,

$$F = p_{\max} A_m = \sqrt{8\pi Z d^2 A_m I_0 \cdot 10^{\beta/10} \text{ dB}} = 12 \text{ mN.}$$

Matlab:

```
beta = 65; d = 2; Am = 10e-4; Z = 420; I0 = 1e-12;
F = sqrt(8*pi*Z*d^2*Am*I0*10^(beta/10))
```

1.2 Extrauppgifter

Ohyra – MBDTI 2010-05-29 uppgift A4

Tema: Växthus

Ohyra är alltid ett problem och på grund av debatten numera vill man helst inte använda besprutningsmedel. En metod är att använda stående ultraljudsvågor över plantorna som påverkar insekterna. Mellan två plattor alstras en stående ultraljudsvåg med frekvens 120 kHz. Partikelhastigheten ska ha ett maxvärde på 1.2 m/s. Vilken förskjutningsamplitud behövs?

Facit: Samband mellan hastighet och förskjutning är

$$s = s_0 \sin(\omega t - kx + \delta) \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = \omega s_0 \cos(\omega t - kx + \delta) \Rightarrow v_{\max} = \omega s_0,$$

och ur detta fås att $s_0 = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{v_{\max}}{2\pi f} = 1.6 \mu\text{m}$.

Maskinring – F 2009-05-18 uppgift A3

Tema: Arbetsplatssäkerhet

I en industrilokal är 20 identiska maskiner utplacerade i en ring (det finns ett skäl till det, men det tar för mycket utrymme att berätta varför). Tillsammans ger de upphov till ett buller på 78.6 dB i mitten av ringen. Hur mycket bullrar de om en maskin stannar?

Facit: Förändringsfaktorn = 19/20 vilket motsvarar -0,22 dB. Alltså 78,4 dB. Talet kan naturligtvis också beräknas genom att räkna ut intensiteten, multiplicera med 19/20 och sedan beräkna ljudintensitetsnivån.

Summer – I 2000-01-11 uppgift 3

Tema: Instrumentpaneler till tyngre fordon

En summer måste naturligtvis också finnas, för att alarmera om riktigt allvarliga fel. Vid första konstruktionsförsök visade sig denna ge för låg ljudintensitetsnivå (=54 dB). För att höja detta värde bytte man frekvens från 600 till 900 Hz, fördubblade membranytan, och ökade vibrationsamplituden med 50%. Vilken blev den nya ljudintensitetsnivån?

Facit: Effekten ut från summern blir $\text{Effekt} = \frac{a^2 \omega^2 Z A_{\text{membran}}}{2}$. Ökningen blir alltså $1.5^2 \times 1.5^2 \times 2 = 10.1$ vilket motsvarar ganska exakt 10 dB

Ulf's lösning: Givet: (1 före, 2 efter förändringarna) frekvenser $f_1 = 600$ Hz, $f_2 = 900$ Hz, membranarea $A_2 = 2A_1$, amplitud $a_2 = 1.5a_1$, ljudintensitetsnivå $\beta_1 = 54$ dB.

Sökt: β_2

Skillnaden i ljudintensitetsnivå är

$$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = \left(\log_{10} \left(\frac{I_{d2}}{I_0} \right) - \log_{10} \left(\frac{I_{d1}}{I_0} \right) \right) \cdot 10 \text{ dB} = \log_{10} \left(\frac{I_{d2}}{I_{d1}} \right) \cdot 10 \text{ dB}, \quad (1.1)$$

där I_{d1} och I_{d2} är intensiteterna på ett avstånd d där mätningen utfördes. Dessa intensiteter fås ur effekten från membranet med ekvation $I_d = \frac{P}{4\pi d^2}$. Effekten

fås från intensiteten I_m vid membranet som

$$P = AI_m = A \frac{1}{2} a^2 \omega^2 Z. \quad (1.2)$$

Detta ger

$$\frac{I_{d2}}{I_{d1}} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{A_2 a_2^2 \omega_2^2 Z}{A_1 a_1^2 \omega_1^2 Z} = 10.1, \quad (1.3)$$

vilket ger $\Delta\beta = \log_{10}(10.1) \cdot 10 \text{ dB} = 10 \text{ dB}$ och vidare

$$\beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta = 64 \text{ dB} \quad (1.4)$$

Ekolod – I 2002-03-05 uppgift 3

Tema: Teknologiska hjälpmedel för tankrederier

Alla båtar har ekolod. Sådana bygger på att man skickar ut ljudpulser direkt i vattnet och mäter när och vad som kommer tillbaka. Ljudsändaren består i princip av en metallbricka som vibrerar med en viss fix amplitud och frekvens. När man har den i luft ger den $50 \mu\text{W}/\text{m}^2$ på 1 m avstånd. Vilken intensitet ger den på 1 m avstånd i vatten? (den är alltså nedsänkt i vattnet)

Facit: Intensiteten ges av $I = a^2 \omega^2 \rho c / 2$. Om amplitud och frekvens hålls konstanta är det bara ρc som ändras. För luft är denna $430 \text{ kg}/\text{m}^2\text{s}$ och för vatten $1.3 \cdot 10^6 \text{ kg}/\text{m}^2\text{s}$ (se exvis sid 349 i Benson). Intensiteten förstärks alltså med en faktor som är kvoten mellan dessa dvs den blir $0.15 \text{ W}/\text{m}^2$

Övning 2

Elektrostatik

2.1 Övningsuppgifter

Garnfragment – MTI 2001-04-27 uppgift 2

Tema: Garnfornässörer

Den snabba mekaniska hanteringen av garn gör att en hel del trådfragment slits loss och virvlar runt i lokalen (=det dammar). Detta består ofta av trådar med längd runt en cm, diameter runt 20 μm , densitet ca 500 kg/m^3 och får en statisk laddning till beloppet motsvarande ca en miljon elektronladdningar per tråd. En idé vore kanske att attrahera dem elektriskt. Vilken storleksordning på elektrisk fältstyrka behövs för att dessa ska styras av ett elektriskt fält med 100 ggr större kraft än tyngdkraften på dem? Går detta tror Du?

Facit: $qE = 100mg \Rightarrow E = \frac{100 \cdot 1.57 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2}{10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}$ Vi vill alltså att fältet ska vara ca 10 MV/m, vilket ska jämföras med att genomslagsfältet i luft är 2 MV/m. I varje fall inte om kraften från E-fältet måste vara 100ggr kraften från tyngdkraftfältet.

Ulfs lösning: Fragmenten har en densitet $\rho = 500 \text{ kg}/\text{m}^3$ och volym

$$V = 1 \text{ cm} \cdot \frac{\pi}{4} (20 \mu\text{m})^2 = 3.1 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3, \quad (2.1)$$

vilket ger massan $m = \rho V$ och tyngdkraften

$$F_g = mg = \rho V g, \quad (2.2)$$

där $g = 9.8 \text{ m}/\text{s}^2$ är tyngdaccelerationen.

Kraften från ett elektriskt fält E blir $F_E = 10^6 e E$ där $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ är elementarladdningen (= -elektronladdningen). Från $F_E = 100 F_g$ får vi då

$$10^6 e E = 100 \rho V g \Rightarrow E = \frac{\rho V g}{10^4 e} \approx 10 \text{ MV}/\text{m} \quad (2.3)$$

Luften har ett överslagsfält på ungefär 2 MV/m så denna fältstyrka skulle inte kunna upprätthållas.

Matlab:

$\rho = 500$; $g = 9.8$; $e = 1.60 \times 10^{-19}$;
 $V = 1 \times 10^{-2} \cdot \pi / 4 \cdot (20 \times 10^{-6})^2$;
 $E = \rho \cdot V \cdot g / (1 \times 10^4 \cdot e)$

Dipolsmuts – I 2001-10-26 uppgift 1

Tema: Skarvning av optiska fibrer

Före skarvning måste de bägge ändytorna behandlas så att de är helt rena. Detta kan ske genom kvarvarande lösa partiklar på ändytorna avlägsnas elektrostatiskt. Man utnyttjar då att de flesta tänkbara föroreningar är elektriska dipoler, med dipolmoment 10^{-29} Cm (storleksordning). Den kraft de sitter fast med är ca 10^{-20} N. Man vill inte använda fält starkare än 10^5 V/m. Fältet kommer från en trådladdning som i sammanhanget kan betraktas som lång. Hur nära måste man komma med trådladdningen (enbart storleksordning efterfrågas)?

Facit: Fältet från en trådladdning kan skrivas $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$

Kraften från detta fält på en dipol är $F_{\text{netto}} = \frac{p\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{pE}{r} \Rightarrow r = \frac{pE}{F_{\text{netto}}} = 10^{-4}$ m

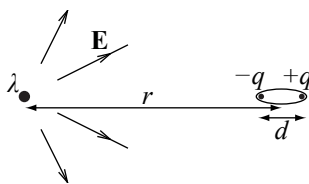
Ulfs lösning:

Givet: $p = qd = 10^{-29}$ Cm

$|F| = 10^{-20}$ N

$E = 10^5$ V/m

Sökt: r



E-fältet från en linjeladdning är

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Kraften på dipolen blir då

$$\begin{aligned}
 F &= F_- + F_+ = -qE(r) + qE(r+d) = q \left(\frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0(r-d/2)} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(r+d/2)} \right) \\
 &= \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{-(r+d/2) + r - d/2}{(r-d/2)(r+d/2)} \underset{d \ll r}{\approx} \frac{-q\lambda d}{2\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{-Eqd}{r} = \frac{-Ep}{r}
 \end{aligned}$$

Från detta kan vi få avståndet som ger rätt kraft och E-fält.

$$r = \frac{Ep}{|F|} = 0.1 \text{ mm}$$

Lysdiod – MT 1999-06-02 uppgift 2

Tema: Cyklism

Ett sätt att klara belysningen med lägre spänningskrav är att använda lysdioder. I en sådan alstras ljuset i ett mycket litet område där det statiska elektriska fältet varierar som $E_x(x) = E_0 \frac{1}{(x^2/x_0^2)+1}$ där $x_0 = 3.0 \mu\text{m}$ ($x = 0$ ligger precis i det mest lysande området). Hur stort blir det maximala värdet på E om spänningsfallet över området ska vara 1.2 V?

Facit: Spänningen ges av att $V = \int_{-\infty}^{\infty} E dr = \int E_0 \frac{1}{(x^2/x_0^2)+1} dx = \pi E_0 x_0 \Rightarrow E_0 = 127 \text{ kV/m}$

Ulf's lösning: Spänningen kan fås genom att integrera det elektriska fältet. Vi gör detta längs x -axeln eftersom det är x -komponenten av det elektriska fältet vi känner till. Integrationsgränserna är okända men mycket större än x_0 , så vi kan välja ∞ .

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} E_x dx = \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \frac{1}{(x^2/x_0^2)+1} dx \quad (2.4)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x/x_0 \\ dx = x_0 du \end{array} \right\} = E_0 x_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2+1} du \quad (2.5)$$

$$= E_0 x_0 [\arctan(u)]_{-\infty}^{\infty} = E_0 x_0 \pi \quad (2.6)$$

Med $U = 1.2 \text{ V}$ får vi styrkan på E-fältet

$$\max(E) = E_0 = \frac{U}{\pi x_0} = 130 \text{ kV/m.} \quad (2.7)$$

Åskmoln – F 2011-?

I åskmoln uppstår laddningsseparation, som i sin tur kan orsaka blixtrar. I ett försök att ta reda på hur laddningsfördelningen uppstår mättes det elektriska fältet på två olika höjder vid botten i molnet. På 2150 m höjd var det 47.1 kV/m och på 2210 m höjd 36.4 kV/m. Fältet var i båda fallen riktade rakt uppåt. Hur stor är laddningstätheten i denna del av molnet?

Facit: Fältet antas vara vertikalt och bara bero av höjden. Vi använder en ytan på en vertikal cylinder S som gaussyta. Den undre ändytan är på höjd $h_1 = 2150 \text{ m}$ och den övre på $h_2 = 2210 \text{ m}$. E-fälten är på dessa ytor $E_1 = 47.1 \text{ kV/m}$ respektive $E_2 = 36.4 \text{ kV/m}$. Gauss sats ger

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

där Q är laddningen innesluten av ytan S . Bidraget till integralen från mantelytan är 0 eftersom fältet där är vinkelrätt mot ytan. Det som är kvar är alltså bara bidraget från de två ändytorna

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_2 A - E_1 A,$$

där A är arean på ändytorna. Laddningstätheten blir då

$$\rho = \frac{Q}{A(h_2 - h_1)} = \frac{\epsilon_0(E_2 A - E_1 A)}{A(h_2 - h_1)} = \epsilon_0 \frac{E_2 - E_1}{h_2 - h_1} = \underline{\underline{-1.6 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^3}}.$$

Ringladdning – TMI 2008-03-10 uppgift B3

Tema: Visioner på utställningar

Det statiska fältet från ett laddat föremål beror ju väldigt mycket på föremålets form. Om föremålet är en ring och den är likformigt laddad blir ju fältet i mitten av ringen noll. Var utmed symmetriaxeln (uttryckt i ringens radie) blir fältet störst?

Facit: Om ringen har radien r och x betecknar avståndet utmed symmetriaxeln blir bidraget från en längdsnutt på axeln

$$dE = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)} \Rightarrow dE_{\text{parallell}} = \frac{\lambda x ds}{4\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}} \Rightarrow E = \frac{\lambda r x}{2\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Denna ska vi söka max till dvs derivera map x och sätta derivatan = 0. Detta ger $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Ulf's lösning:

Av symmetriskäl kommer det elektriska fältet vara parallellt med ringens symmetrilinjen (x-axeln i figuren). Bidraget till x-komponenten av E-fältet från en liten del av ringen med laddning dq och vinkel $d\phi$ är

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{Q \frac{d\phi}{2\pi}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{x}{r} = \frac{Q \frac{d\phi}{2\pi} x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

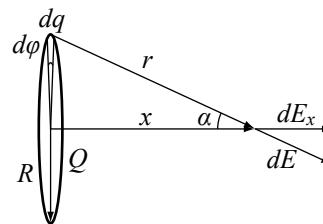
Totala fältstyrkan får vi genom att integrera längs ringen,

$$E = \int_0^{2\pi} \frac{Q \frac{d\phi}{2\pi} x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Fältet är som starkast där derivatan är 0.

$$0 = \frac{dE}{dx} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x^2 + R^2)^{3/2} - x2x \frac{3}{2}(x^2 + R^2)^{1/2}}{(x^2 + R^2)^3}$$

$$\Rightarrow 0 = x^2 + R^2 - 3x^2 \Rightarrow x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$



2.2 Extrauppgifter

Bildrör1 – MT 1998-05-28 uppgift 1

Tema: Head up TV

Om den lilla TV'n innehåller ett bildrör (som en vanlig TV) kommer detta att behöva en elektron-kanon som ger elektroner med hög energi. Antag att de lämnar en negativ elektrod på potentialen -100 V utan hastighet och leds genom en ringelektrod med potentialen -10 V. Vilken fart har de då de passerar ringelektroden?

Facit: Elektronerna passerar ett spänningsfall på 90V och deras hastighet ges av

$$q_e V = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q_e V}{m}} = 5.6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Elstängsel – F 2007-06-04 uppgift 4

Tema: Skansen

Många djurparker (och bönder) använder elstängsel för att hålla djur och människor åtskiljda. En del anser att djuren aldrig behöver nudda stängslet för

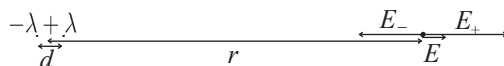
att hålla sig borta utan att de i stället känner fältet runt det. Antag att man har två trådar bredvid (i sidledd) varandra på ngn cm avstånd, trådarna har motsatt laddning (en plus och en minus). Ungefär hur mycket starkare är fältet på 3 dm avstånd jämfört med på 1 m?

Facit: Fältet från de bägge trådladdningar på avstånd a från varandra och på avstånd L från observatören = djuret blir då

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 L} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(L+a)} = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 L(L+a)} \approx \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 L^2}$$

Fältet avtar alltså som kvadraten på avståndet. På 3 dm blir fältet $(10/3)^2 = 11$ ggr starkare.

Ulfs lösning:



Det elektriska fältet på avstånd r enligt figuren ges av summan av fältet från den positiva och den negativa trådladdningen enligt ekvation (??) med $k = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$

$$E = E_+ - E_- = \frac{k}{r - d/2} - \frac{k}{r + d/2} \quad (2.8)$$

$$= k \frac{r + d/2 - (r - d/2)}{(r - d/2)(r + d/2)} = \frac{kd}{r^2 - d^2/4} \approx \frac{kd}{r^2} \quad (2.9)$$

eftersom $d \ll r$.

Kvoten mellan fältet på avstånd $r_1 = 0.3$ m och $r_2 = 1$ m blir då

$$\frac{E(r_1)}{E(r_2)} = \frac{kd/r_1^2}{kd/r_2^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 11 \quad (2.10)$$

Rökgasrening – MTI 2002-08-23 uppgift 2

Tema: Miljövärd

I elektrostatisk rökgasrening vill man skapa ett fält som är kraftigt inhomogent (för att attrahera dipolerna i röken). Detta görs ofta med hjälp av trådladdningar som löper i z-riktningen. Två positiva trådladdningar i linjerna genom (0,0)cm och (0,1)cm och två negativa genom (1,1)cm och (1,0) cm. Plotta fältets belopp utefter linjen (som ges på parameterform)

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 0.50 \text{ cm} \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Graderade axlar

Facit: y- och z-komp blir noll pga symmetri. Sätt sedan i beräkningen $1\text{cm} = 2a$

Fältet från de positiva laddningarna blir då

$$E_+ = 2 \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{x^2}{a^2 + x^2}$$

Den sista faktorn är trigonometri för att få x-komp

Pss

$$E_+ = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{2a - x}{(2a - x)^2 + a^2}$$

Dessa ska sedan läggas ihop och plottas

Dipolattraktion – FCL 2009-06-04 uppgift B1

Tema: Proaktiv säkerhet i bilar

Hur beror kraften mellan två elektriska dipoler på avståndet mellan dem om de kan rotera fritt men inte förflytta sina tyngdpunkter?

Facit: De ställer först in sig på linje. Fältet från den ena blir då

$$E = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

Kraften på den andra dipolen kan då fås genom att bilda skillnaden mellan beloppen av krafterna på plusladdningen och på minusladdningen

$$\begin{aligned} \Delta F &= q(E(L) - E(L + d)) = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 L^3} - \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 (L + d)^3} \\ &= \frac{qp(L^3 + 3L^2d + 3Ld^2 + d^3)}{4\pi\epsilon_0 L^3(L + d)^3} - \frac{qpL^3}{4\pi\epsilon_0 L^3(L + d)^3} \\ &= \frac{3qpL^2d + \dots}{4\pi\epsilon_0 L^6} = \frac{3p^2}{4\pi\epsilon_0 L^3}, \end{aligned}$$

där småtermer pga $d \ll L$ försumrats. Alltså omvänt prop mot avståndet upphöjt i 4.

Övning 3

Kondensatorer

3.1 Övningsuppgifter

Oljenivåmätare – I 2002-03-05 uppgift 1

Tema: Teknologiska hjälpmedel för tankrederier

När man vill mäta hur full en oljetank är gör man det ofta genom att i tanken montera ett par parallella plattor och sedan mäta hur kapacitansen mellan dem förändras när utrymmet mellan dem är mer eller mindre fyllt av olja. Antag att plattavståndet är 10 mm, plattbredden 120 mm och plattornas höjd är 8.0 m. Oljans $\epsilon_r = 5.6$. Hur beror kapacitansen mellan plattorna av oljenivån?

Plotta C som funktion av oljans höjd (dvs 0 till 8 m) i ett stort diagram med graderade axlar.

Facit: Om platthöjden kallas H och oljans höjd h , bredden b och plattavst d kan man skriva kapacitansen som ersättningskapacitansen för två parallellkopplade kondensatorer

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r h b}{d} + \frac{\epsilon_0 (H - h) b}{d} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) b}{d} h + \frac{\epsilon_0 H b}{d}$$

dvs en rät linje från 0.85 nF till 4.76 nF.

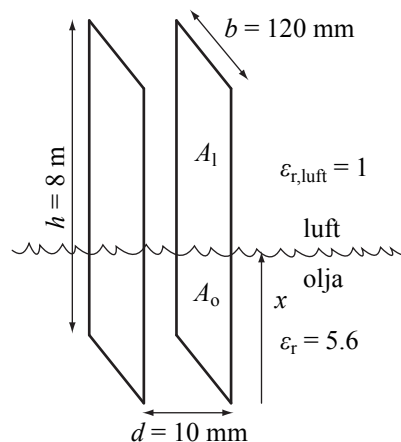
Ulfs lösning:

Totala kapacitansen är summan av kapacitansen för delen av plattkondensatorn som är i oljan och delen i luften. Vi kan betrakta systemet som en parallellkoppling av dessa två plattkondensatorer. Kapacitansen för oljedelen är

$$C_o = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A_o}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{x b}{d},$$

och för luftdelen

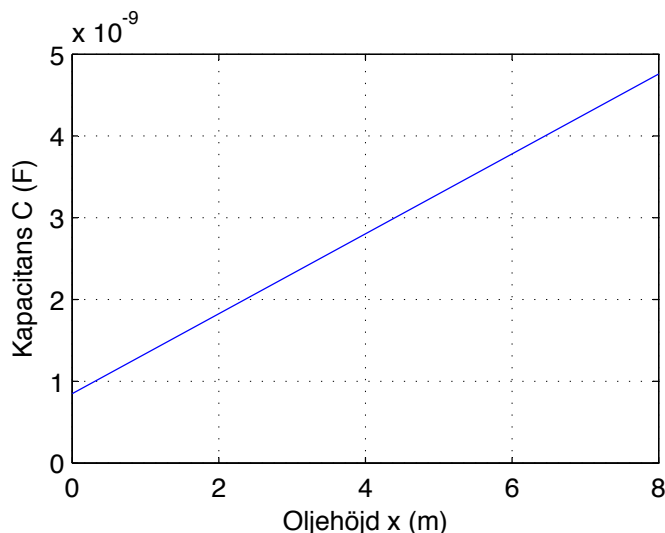
$$C_l = \epsilon_0 \epsilon_{r,\text{luft}} \frac{A_l}{d} = \epsilon_0 \frac{(h - x) b}{d}.$$



Totala kapacitansen blir då

$$C = C_o + C_1 = \frac{\epsilon_0 b}{d}(x\epsilon_r + h - x) = \frac{\epsilon_0 b h}{d} + \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)b}{d}x$$

Detta är en linjär funktion som går från $C(0 \text{ m}) = \frac{\epsilon_0 b h}{d} = 0.85 \text{ nF}$ till $C(8 \text{ m}) = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b h}{d} = 4.8 \text{ nF}$.



Matlab:

```
h = 8; b = 120e-3; d = 10e-3; er = 5.6; e0 = 8.85e-12;
x = [0 8];
C = e0*b*h/d+e0*(er-1)*b/d*x;
plot(x,C)
xlabel('Oljehöjd_x_(m)')
ylabel('Kapacitans_C_(F)');
```

Gnista – I 2003-01-13 uppgift 1

Tema: Vinterkyla

Vid kallt väder ökar problemen med statisk elektricitet i vardagslivet. Man brukar säga att det beror på att inomhusluften är torrare.

Detta gör att mycket av vår elektroniska utrustning lever farligt. Uppskatta (storleksordning räcker) hur stor energi en gnista som slår mellan en fingertopp och en vattenkran innehåller. Gnistan kommer då fingret är 9 mm från kranen.

Facit: Det lättaste är att se fingertoppen med kran som en plattkondensator (storleksordning sökes). Fältet i den ska då vara överslagsfältet dvs 20000 V/cm, och ytan kan man väl sätta till 1 cm²

$$\text{Energi} = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2 dS}{2} = 1,6 \mu\text{J}$$

Dvs storleksordningen 1 μJ

[Rättning: antagandena ovan ger 16 μJ.]

Ulfs lösning: För att det ska slå en gnista måste det elektriska fältet komma upp i överslagsfältet som i luft är $E_B \approx 2 \text{ MV/m}$. Betrakta fingertopp och vattenkran som en kondensator med area $A = 1 \text{ cm}^2$ och plattavstånd $d = 9 \text{ mm}$. Den relativa permitiviteten hos luft är $\epsilon_r \approx 1$. Den lagrade energin innan överslag är då

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r \frac{A}{d}(E_B d)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 A E_B^2 d = 16 \text{ } \mu\text{J}. \quad (3.1)$$

Matlab:

```
EB = 2e6; % [V/m]
A = 1e-4; % [m^2]
d = 9e-3; % [m]
epsilon0 = 8.85e-12; % [C^2/(Nm^2)]
Epot = .5*epsilon0*A*EB^2*d
```

Kondensatormikrofon – MT 2005-06-01 uppgift 2

Tema: Rockfestivaler

En typ av mikrofon bygger på att man har en kondensator där ljudet får den ena av plattorna att vibrera. Spänningen mellan plattorna hålls konstant till 12 V, och kondensatorns kapacitans i vila är 11 μF . Vilken ström ger den upphov till om plattavståndet varierar mellan 0.495 mm och 0.505 mm?

Antag att frekvensen är 500 Hz.

Facit: Jämviktslaget för plattavståndet är uppenbarligen 0,500 mm och då är kondensatorns kapacitans 11 μF , vilket med 12 V spänning ger en laddning på

$$Q = CU = 132 \text{ } \mu\text{C}$$

Plattavståndet varierar $\pm 1\%$. Då gör kapacitansen det också. Då gör laddningen det också, dvs laddningen varierar som

$$Q = Q_0 + Q_1 \sin 2\pi ft \text{ där } Q_1 = 1,32 \text{ } \mu\text{C} \text{ och } f = 500 \text{ Hz}$$

Strömmen ges av

$$I = \frac{dQ}{dt} = 2\pi f Q_1 \cos 2\pi ft = 4,14 \text{ mA} \cos 2\pi ft$$

Vill man sedan räkna ut effektivvärde så är det OK, och har man antagit någon annan variation än sinusformig så är det OK, bara man angivit vilken.

Ulfs lösning: Antag att plattavståndet varierar sinusformat,

$$d = d_0 + d_1 \sin(2\pi ft). \quad (3.2)$$

Parametrarna blir då $d_0 = 0.5 \text{ mm}$, $d_1 = 5 \text{ } \mu\text{m}$ och $f = 500 \text{ Hz}$. Kapacitansen hos kondensatorn ges av

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (3.3)$$

och varierar därmed med tiden. Detta gör att laddningen $Q = CU$ i kondensatorn varierar i tiden vilket i sin tur ger upphov till en ström I .

$$I = \frac{dQ}{dt} = U \frac{dC}{dt} = U \frac{dC}{dd} \frac{dd}{dt} = -U \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d^2} 2\pi f d_1 \cos(2\pi ft) \quad (3.4)$$

$$\approx -U \frac{C}{d_0} 2\pi f d_1 \cos(2\pi ft) = -4.1 \text{ mA} \cdot \cos(2\pi ft) \quad (3.5)$$

Givarsignal – I 2005-01-11 uppgift 2

Tema: Industriell positionering

Signalerna från givare av olika slag är ofta mycket svaga och snabba. För att minska störningsrisken leds de ofta genom koaxialkablar. Hur lång får en sådan vara om den har kapacitansen 80 pF/m och resistansen 0.04 ohm/m och man vill överföra störningar som varierar på 100 ns?

(OBS enheterna)

Facit:

$$\frac{R}{l} = 0.04 \text{ } \Omega/\text{m}, \quad \frac{C}{l} = 80 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \Rightarrow \text{tidskonstant} = RC = \frac{R}{l} \frac{C}{l} l^2$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{\frac{\text{tidskonstant}}{\frac{R}{l} \frac{C}{l}}} = 176 \text{ m}$$

Dvs ngt hundratal meter är tillåtet.

Pixelkondensator – I 2002-01-09 uppgift 2

Tema: Digitala high-end-kameror

Varje bildpunkt i bildchipet är en liten kondensator, där man vill maximera energi per volym. Hur inverkar plattavstånd, plattstorlek och isoleringsmaterial på detta? Vilka parametrar på isoleringsmaterialet är avgörande? (2 st)

Facit: Energin per volym ges av

$$w_E = \epsilon_0 \epsilon_r E^2 / 2$$

dvs den beror ej av plattstorlek eller plattavstånd. Däremot kommer relativa permittiviteten in. Vidare är det maximala E-värdet det som ges av $E_{\text{överslag}}$, dvs överslagshållfastheten.

3.2 Extrauppgifter

Alkometer – FCL 2009-06-04 uppgift A2

Tema: Proaktiv säkerhet i bilar

Man måste i apparaten (alkometern) kolla att det verkligen är utandningsluft som passerar och det gör man genom att mäta temperatur, koldioxid och luftfuktighet på den gas som passerar. Luftfuktigheten mäts genom att luften passerar mellan plattorna i en plattkondensator som ska ha spänningen 12 V.

Plattarean är 8.0 cm^2 . Hör hög kan kapacitansen göras om man maximalt vill ha ett E-fält som ligger på 50 kV/m ?

$$\text{Facit: } d = \frac{U}{E_{\text{överslag}}} \text{ och } C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = \frac{\epsilon_0 1 S E_{\text{överslag}}}{U} = 30 \text{ pF}$$

Koaxialkabel – I 1999-10-22 uppgift 4

Tema: Elektronikmaskföretaget Micronic

Den elektriska signal som driver den akustooptiska modulatorens har samma frekvens som ultraljudet, dvs ganska hög. Man vill leda denna i en koaxialkabels innerledare med radie r .

Kabelns längd är L . I en provuppställning visar sig kretsen blir för långsam (=ha för stor tidskonstant) och man lyckas då reducera längden med 25% (dvs till 75% av utgångsvärdet) och öka radien r med 50%. Ytterledarens radie förändras inte utan är hela tiden = dubbla den ursprungliga innerradien. Hur mycket snabbare blir kretsen?

Facit: Det avgörande är RC-konstanten för kretsen:

$$RC_{\text{före}} = \frac{\rho L}{\pi r^2} \cdot \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(2r/1.5r)}, \quad RC_{\text{efter}} = \frac{2\pi\rho\epsilon_0 0.75^2 L^2}{\pi 1.5^2 r^2 \ln(2r/r)}$$

Kvoten mellan dessa blir 0.103, dvs kretsen blir efter förändringarna ca 10ggr snabbare. (Ett isoleringsmaterial ändrar inte på detta)

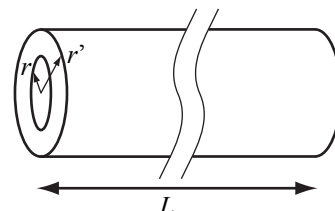
[Rättelse: Kvoten blir 0.6, så kretsen blir 1.66 gånger snabbare.]

Ulfs lösning:

Givet: $L_2 = 0.75L_1$ (1 före, 2 efter), $r_2 = 1.5r_1$,

$r' = 2r_1$.

Sökt: $\frac{\tau_{RC,1}}{\tau_{RC,2}}$



Tidskonstanten för kabeln är $\tau_{RC} = RC$. Kapacitansen för cylinderkondensator är

$$C = L \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r'/r)} \quad \text{Young and Freedman s. 820}$$

Resistansen är

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{\rho L}{\pi r^2}$$

där ρ är resistiviteten i ledningsmaterialet.

Den sökta kvoten blir då

$$\frac{\tau_{RC,1}}{\tau_{RC,2}} = \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2} = \frac{\frac{\rho L_1}{\pi r_1^2} L_1 \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r'/r_1)}}{\frac{\rho L_2}{\pi r_2^2} L_2 \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r'/r_2)}} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \frac{\ln(r'/r_2)}{\ln(r'/r_1)} = 1.66$$

Sladden blir alltså 66% snabbare.

Matlab: $1/.75^2 * 1.5^2 * \log(2/1.5)/\log(2)$

Tjuvstartssensor – MTI 2008-08-18 uppgift A2**Tema:** Resultatmätning vid idrottsevenemang

Tjuvstartssensorerna (som vållat mycket diskussion och vredesutbrott på tidigare OS) är ofta kapacitiva, dvs sprintern trycker med foten på startblocket som därvid trycker ihop plattorna i en plattkondensator som hålls vid konstant spänning. Om foten rör sig ändras plattavståndet och en ström går då genom ledningen fram till kondensatorn. Antag ett plattavstånd på 4.0 mm obelastad, 3.0 mm då foten trycker mot plattan och 2.0 mm då foten gör avstamp samt en plattarea på 4.0 cm². Hur stor ström (i genomsnitt) går det då i ledningen om foten trycker till (3 mm till 2 mm) på 0.01 s. Det är luft mellan plattorna. Spänningen är hela tiden 10V. RC-konstanten för kretsen är sådan att den inte spelar någon roll för resultatet.

Facit: Vi har här en kondensator där C vid konstant spänning.

$$\Delta Q = U\Delta C = \epsilon_0 S U \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) = 5.9 \cdot 10^{-12} \text{ As} \Rightarrow I = \frac{dQ}{dt} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta t} = 0.59 \text{ nA}$$

Plattkondensator – FBDMTI 2009-08-17 uppgift A4**Tema:** Fjärrkontroller

I fjärrkontroller (precis som i all annan elektronik) ingår kondensatorer som man vill göra så små som möjligt. Antag att de görs i form av plattkondensatorer och ska tåla 3 V. Överslagsfältet i isolatormaterialet är 3.2 MV/m och $\epsilon_r = 5.6$. Hur små kan de göras om de ska ha kapacitansen 0.5 pF? (Du behöver inte tänka på säkerhetsmarginaler utan räkna fram gränsvärdet!)

Facit: Plattavståndet d kan inte väljas mindre än det som ger överslag vid 3V, vilket är 0.93 μm . Då fås

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \Rightarrow S = \frac{dC}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 9.4 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$$

dvs sidan ska vara ungefär 0.1 mm.

Cylinderkondensator – FBDMTI 2009-08-17 uppgift B2**Tema:** Fjärrkontroller

Antag att det i A4 (plattkondensator) är en cylinderkondensator i stället (mer realistiskt), där skillnaden mellan r_i och r_y inte kan vara mindre än 2% av r_i och cylinderns längd är fix till 5 r_i . Vad blir då r_i och h i den minsta kondensator som uppfyller de elektriska kraven i A4?

Facit: Minsta tillåtna plattavståndet pga överslagsrisken, blir fortfarande ungefär 1 μm , vilket skulle ge $r_i = 50 \mu\text{m}$, vilket ger h =cylinderns längd = 250 μm . Detta ger en kondensator med kapacitansen 0.078 pF vilket ju är för lite. Alltså får vi öka r_i och därmed h . Vi behöver ett h som är 0.5/0.078 ggr större dvs $h = 1.6 \text{ mm}$ och $r_i = 0.32 \text{ mm}$.

[Detta stämmer ej]