

Föreläsning 8, Introduktion till tidsdiskret reglering, Z-transfomer, Överföringsfunktioner

KTH

3 februari 2012



Innehåll

- 1 Kapitel 15. Tidsdiskret reglering - introduktion
- 2 Kapitel 16.1-16.2 Z-transform
- 3 Kapitel 16.3-16.4 Tidsdiskreta överföringsfunktioner
- 4 Övningsuppgifter

Innehåll

- 1 Kapitel 15. Tidsdiskret reglering - introduktion
- 2 Kapitel 16.1-16.2 Z-transform
- 3 Kapitel 16.3-16.4 Tidsdiskreta överföringsfunktioner
- 4 Övningsuppgifter

Vad är tidsdiskret reglering?

- Regulatorn arbetar i diskret tid, styrsignalen ändras endast vid diskreta tidpunkter, bild sid 46.
- Regulatorn är datorbaserad.

Fördelar med datorbaserad reglerteknik

- *Mer avancerade regulatorer.*
 - Mycket mer avancerade algoritmer kan programmeras jämfört med att bygga dem med analoga komponenter.
- *Mer avancerade identifieringsmetoder.*
 - Möjligt bestämma överföringsfunktioner experimentellt.
- *Förbättringar av praktisk karaktär.*
 - Bildskärmar och andra displayer.
 - Lagring och analys av gamla mätvärden.
 - Kommunikation med andra regulatorer och övriga system.
 - Linearisering, filtrering, larm osv

Komponenter i tidsdiskreta reglersystem

- Bild sid 292, 293.
- Dator, D/A- och A/D-omvandlare nytt.
- Styrdon, givare och process samma som vid analog reglering.
- Börvärdesgivare och jämförare behövs ej.

Reglerprinciper för diskret reglering

- Regulatorns utsignal är den styckvis konstanta signalen $u(k)$, där k betecknar samplingstidpunkt, bild sid 294.
- Regulatorns insignal är det samplade reglerfelet, $e(k) = r(k) - y(k)$.
- $e(k - 1), u(k - 1)$ är värden ett samplingsintervall bakåt i tiden.
- I stället för differentialekvationer används *differensekvationer*.
 - Exempel: $u(k) = b_1 e(k) + b_2 e(k - 1) + a_1 u(k) + a_2 u(k - 1)$, där a_1, a_2, b_1, b_2 är konstanter.
 - Högre (och lägre) ordningstal kan lätt användas.

Hur dimensionera digitala regulatorer?

- *Transformera analog regulator, tex PID.*
 - Mycket kort samplingsintervall krävs.
- *Direkt dimensionering av digital regulator.*
 - Kraftfullare, ger möjlighet till flera olika typer av regulatorer.

Tidsdiskret PID-reglering

- Derivatan, $e'(k) \approx \frac{e(k) - e(k-1)}{h}$
- Integralen, $\int_0^{kh} e(t) dt \approx h \sum_{i=1}^k e(i)$
- h är längden på samplingsintervallet. Kortare samplingsintervall ger bättre approximation av analoga värden.
- Ovanstående approximationer ger följande differensekvation för en tidsdiskret regulator.

$$u(k) = K \left[e(k) + T_D \frac{e(k) - e(k-1)}{h} + \frac{h}{T_I} \sum_{i=1}^k e(i) \right] =$$

$$\begin{cases} w(k) = w(k-1) + e(k) \\ u(k) = K \left[e(k) + T_D \frac{e(k) - e(k-1)}{h} + \frac{h}{T_I} w(k) \right] \end{cases}$$

Innehåll

- 1 Kapitel 15. Tidsdiskret reglering - introduktion
- 2 **Kapitel 16.1-16.2 Z-transform**
- 3 Kapitel 16.3-16.4 Tidsdiskreta överföringsfunktioner
- 4 Övningsuppgifter

Definition

- Transformen $F(z)$ till den tidsdiskreta funktionen $f(k)$ bestäms av summan

$$F(z) = Z[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

Transform av stegfunktion

- Bild sid 300.
- Om steget har höjden a blir transformen

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot z^{-k} = a(z^{-0} + z^{-1} + z^{-2} + \dots) = \\ & a \left[(z^{-1})^0 + (z^{-1})^1 + (z^{-1})^2 + \dots \right] = \\ & [\text{geometrisk summa}] = a \frac{1}{1 - z^{-1}} = a \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

Transform av fördröjd stegfunktion

- Bild sid 301.
- Om steget har höjden a blir transformen

$$F(z) = \sum_{k=L}^{\infty} a \cdot z^{-k} = a \left(z^{-L} + z^{-(L+1)} + z^{-(L+2)} + \dots \right) =$$

$$az^{-L} \left[(z^{-1})^0 + (z^{-1})^1 + (z^{-1})^2 + \dots \right] =$$

$$[\text{geometrisk summa}] = az^{-L} \frac{1}{1 - z^{-1}} = az^{-L} \frac{z}{z - 1}$$

Transform av puls

- Bild sid 301.
- Om pulsen har höjden a blir transformen

$$F(z) = \sum_{k=0}^0 a \cdot z^{-k} = a \cdot z^{-0} = a$$

Flera transform

- Tabell sid 302 och 515.
- Se speciellt transformen för a^k

Räkneregler för z-transformen

- Se sid 302-303.
- Superpositionsregeln, z-transformen är en lineär operation.
- Förskjutningssatsen, z^{-L} är den tidsdiskreta fördröjningsoperatoren (vars analoga motsvarighet är e^{-Lhs}).
- Begynnelsesatsen
- Slutvärdessatsen, gäller om slutvärdet existerar, dvs om $F(z)$ konvergerar.

Innehåll

- 1 Kapitel 15. Tidsdiskret reglering - introduktion
- 2 Kapitel 16.1-16.2 Z-transform
- 3 Kapitel 16.3-16.4 Tidsdiskreta överföringsfunktioner
- 4 Övningsuppgifter

Metod för att bestämma tidsdiskreta överföringsfunktioner

- 1 Vi känner ett filters differensekvation och söker dess överföringsfunktion (z-transform).

Exempel: $y(k) = 5y(k-1) + 3y(k-2) + u(k-1) + 4u(k-2)$

- 2 Flytta all y -termer till vänster sida.

Exempel: $y(k) - 5y(k-1) - 3y(k-2) = u(k-1) + 4u(k-2)$

- 3 z-transformera differensekvationen.

Exempel: $Y - 5Yz^{-1} - 3Yz^{-2} = Uz^{-1} + 4Uz^{-2}$

- 4 Bryt ut Y ur vänsterledet och U ur högerledet.

Exempel: $Y [1 - 5z^{-1} - 3z^{-2}] = U [z^{-1} + 4z^{-2}]$

- 5 Kvoten mellan Y och U är överföringsfunktionen, $H(z)$.

Exempel: $H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{z^{-1} + 4z^{-2}}{1 - 5z^{-1} - 3z^{-2}}$

Positiv och negativ representation

- Resultatet från föregående exempel,

$H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{z^{-1} + 4z^{-2}}{1 - 5z^{-1} - 3z^{-2}}$, är skrivet på negativ form, dvs alla z har negativa exponenter.

- Positiv form betyder att alla z har positiva exponenter. Det kan vi få genom att förlänga bråket med den högsta exponenten, z^2 i

det här fallet, $H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{z + 4}{z^2 - 5z - 3}$

Metod för att beräkna tidsförlopp med hjälp av överföringsfunktioner

- 1 Insignalen $u(k)$ till ett filter och filtrets differensekvation är kända.
Vi söker utsignalen, $y(k)$.

Exempel: $y(k) = 0.6y(k-1) + 2.4u(k-1)$, $u(k)$ är ett enhetssteg.

- 2 Bestäm överföringsfunktionen, $H(z)$, enligt ovan.

Exempel: $H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{2.4z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}}$

- 3 Bestäm z-transformen, $U(z)$, till differensekvationen, $u(k)$, med hjälp av tabell.

Exempel: $U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$

Metod för att beräkna tidsförlopp med hjälp av överföringsfunktioner, forts

- 4 Bestäm utsignalens transform genom att multiplicera $H(z)$ och $U(z)$.

Exempel:
$$Y(z) = \frac{2.4z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{2.4z^{-1}}{(1 - 0.6z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

- 5 Bestäm utsignalens differensekvation, $y(k)$, genom att inverstransformera $Y(z)$. Detta görs med hjälp av tabell, eventuellt måste uttrycket partialbråksuppdelas först.

Exempel: I detta fall kan nedersta raden i tabellen på sid 515 användas. Vi har $e^{-a} = 0.6$ och $K(1 - e^{-a}) = 2.4$. Detta ger $a = -\ln 0.6$, $K = 6$, vilket ger utsignalen
$$y(k) = 6(1 - e^{(\ln 0.6)k}) = 6(1 - 0.6^k), k \geq 0$$

- En graf av stegsvaret finns på sid 307.

Metod för att beräkna tidsförlopp med hjälp av iterativa beräkningar

- Om differensekvationen och insignalen är kända kan vi beräkna utsignalen värde för värde genom att sätta in värden av insignal och utsignal i differensekvationen.
- Ett exempel på detta finns på sid 309.

Innehåll

- 1 Kapitel 15. Tidsdiskret reglering - introduktion
- 2 Kapitel 16.1-16.2 Z-transform
- 3 Kapitel 16.3-16.4 Tidsdiskreta överföringsfunktioner
- 4 Övningsuppgifter

Övningsuppgifter

- 16.1c, 16.4a, 16.5c, 16.6a, 16.6b, 16.7a