KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till Kontrollskrivning 2
Måndagen den 13 februari 2012

(1) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy,$$

där D är triangeln med hörnpunkter i $(-1,0)$, $(0,1)$ och $(1,0)$. **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Vi räknar ut dubbelintegralen som en upprepad enkelintegral, där vi integrerar i x-riktningen först och sedan i y-riktningen. För y mellan 0 och 1 ska då x gå från $y-1$ till $1-y$ och vi får:

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} (x^2+y)\,dx\right)\,dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}+xy\right]_{x=y-1}^{x=1-y}\,dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(1-y)^3}{3}+(1-y)y-\frac{(y-1)^3}{3}-(y-1)y\right)\,dy \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(OBS: Den som vill göra det lättare för sig kan observera att integranden och området är symmetriska runt y-axeln, vilket gör att integralen i uppgiften är precis lika med 2 gånger integralen över bara högra halvan av triangeln. Detta ger alltså samma svar med något enklare räkningar.)

(2) Bestäm det största och minsta värde som funktionen $f(x, y) = xy^2 + x$ antar på ellips-skivan $2x^2 + y^2 \leq 1$. **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Funktionen f är kontinuerlig på ellips-skivan som är kompakt, så vi vet att f antar ett största och ett minsta värde. Dessa måste antas antingen i inre kritiska punkter eller i randpunkter (eftersom f är ett polynom och alltså deriverbar hur många gånger som helst överallt). Vi söker först kritiska punkter, dvs punkter där båda partiella derivatorna är noll. Eftersom

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 1$$

som är skilt från noll för alla (x, y) så saknar funktionen kritiska punkter. Vi undersöker nu randen till ellips-skivan. På randen är $2x^2 + y^2 = 1$ vilket är ekvivalent med att $y^2 = 1 - 2x^2$ och $-1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2}$. För alla punkter (x, y) på randen gäller alltså att

$$f(x, y) = f(x, 1 - 2x^2) = x(1 - 2x^2) + x = 2x - 2x^3, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sätt $g(x) = 2x - 2x^3$, $-1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2}$. Då är g ett polynom av en variabel, alltså kontinuerlig, varför största och minsta värde måste antas på det slutna och begränsade intervallet. De kan antas i inre kritiska punkter eller i ändpunkterna på intervallet. Vi deriverar och får

$$g'(x) = 2 - 6x^2$$

och vi ser att $g'(x) = 0$ om och endast om $x = \pm 1/\sqrt{3}$, som båda ligger i intervallet. Vi jämför nu funktionsvärdena i de kritiska punkterna med funktionsvärdena i ändpunkterna på intervallet:

$$g(-1/\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad g(1/\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad g(-1/\sqrt{3}) = -\frac{4\sqrt{3}}{9}, \quad g(1/\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

Vi ser att största värdet är $4\sqrt{3}/9$ och minsta värdet är $-4\sqrt{3}/9$ vilket därmed också, enligt vår argumentation ovan, är största respektive minsta värdet av f på ellips-skivan. (OBS: randundersökningen ovan kan förstås också göras med Lagranges multiplikator-metod. Man ska då optimera f under bivillkoret $2x^2 + y^2 = 1$. Denna metod ger förstås samma svar.)

(3) En platt homogen cirkulär skiva med radie R och ytdensitet ϱ roterar med vinkelhastigheten ω kring en axel som är vinkelrät mot skivan och går genom skivans centrum.

Skivans totala rörelseenergi ges då av

$$W = \frac{1}{2}\int\int_D \varrho v^2\,dx\,dy,$$

där D är cirkelskivan och $v = \omega r$ är farten för en punkt (x, y) på avståndet r från skivans centrum. Bestäm energin W. **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

För att beräkna integralen inför vi polära koordinater, $x = r\cos\vartheta,\ \ y = r\sin\vartheta$, där $0 \le r \le R$ och $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Eftersom Jacobi-determinanten av detta koordinatbyte är r får vi:

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2}\int\int_D \varrho v^2\,dx\,dy &= \frac{1}{2}\int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \varrho\omega^2 r^3\,d\vartheta\right)\,dr \\ &= \pi\varrho\omega^2\int_0^R r^3\,dr \\ &= \frac{\pi\varrho\omega^2 R^4}{4}. \end{aligned}$$

Svar:

(1) $1/2$

(2) Största värdet är $4\sqrt{3}/9$ och minsta värdet är $-4\sqrt{3}/9$

(3) $\dfrac{\pi\varrho\omega^2 R^4}{4}$